

# Kap. 1 : Grundlagen

## § 1. Relationen

### Relationen

Relationen stellen Beziehungen zwischen den Elementen zweier Mengen her. Beispiele:

- 1)  $M$  sei die Menge aller Menschen. Für  $x, y \in M$  bedeute  $x \sim y$ , daß  $x$  mit  $y$  verwandt ist
- 2)  $M$  sei die Menge aller Männer und  $F$  die aller Frauen. Für  $x \in M$  und  $y \in F$  bedeute  $x \sim y$ , daß  $x$  mit  $y$  verheiratet ist. Ein "Ehepaar" ist also ein Paar  $(x, y)$  mit  $x \sim y$ . Die Menge  $E := \{(x, y) \mid x \in M, y \in F, x \sim y\} \subseteq M \times F$  ist dann eine Teilmenge von  $M \times F$ , durch die die Relation "verheiratetsein" vollständig beschrieben ist.
- 3)  $x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$  "Kleiner-gleich-Beziehung".
- 4)  $m, n \in \mathbb{Z} : m \mid n$  (d.h.  $\exists k \in \mathbb{Z} : n = km$ ) "Teilbarkeitsbeziehung"
- 5)  $U, V \in \mathcal{P}(M) : U \subseteq V$  "Enthaltenseins-Beziehung"
- 6)  $G$  sei die Menge aller Geraden in der Ebene und es seien  $g, h \in G : g \parallel h$  oder  $g \perp h$ .
- 7)  $M$  sei eine beliebige Menge,  $x, y \in M : x = y$  "Gleichheit".

Mathematisch gesehen wird eine Relation vollständig bestimmt durch eine Teilmenge eines kartesischen Produktes, so ist z.B. die Teilbarkeitsbeziehung in 4) beschrieben durch die Menge:

$$\{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}, m \mid n\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

**(1.1) DEF:**  $M$  und  $N$  seien Mengen. Eine Teilmenge  $\rho \subseteq M \times N$  heißt eine **Relation zwischen  $M$  und  $N$** . Im Falle  $M = N$  heißt  $\rho$  eine **Relation auf  $M$** . Für  $(x, y) \in \rho$  schreibt man auch  $x \rho y$  und sagt: " $x$  steht in Relation  $\rho$  zu  $y$ ".

Zu Beispiel 7): Die Menge  $\Delta_M := \{(x, x) \mid x \in M\}$  heißt **Diagonale von  $M$** .  $\Delta_M \subseteq M \times M$  ist dann eine Relation auf  $M$ . Es gilt:  $\forall (x, y) \in M \times M : (x, y) \in \Delta_M \iff x = y$ , d.h.  $\Delta_M$  beschreibt gerade die Gleichheitsbeziehung zwischen den Elementen von  $M$ .

## Abbildungen

Eine Abbildung  $f : M \longrightarrow N$  ist vollständig durch ihren Graphen

$$\{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subseteq M \times N$$

beschrieben. Daher ist eine Abbildung im Grunde genommen eine Relation zwischen den beiden Mengen  $M$  und  $N$ .

**(1.2) DEF:** Eine **Abbildung**  $f : M \longrightarrow N$  von der Menge  $M$  in die Menge  $N$  ist eine Relation  $f \subseteq M \times N$  mit folgenden Eigenschaften:

- a)  $f$  ist **linkstotal**, d.h.  $\forall x \in M \exists y \in N : (x, y) \in f$
- b)  $f$  ist **rechtseindeutig**, d.h.  $\forall x \in M \forall y, y' \in N : (x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \implies y = y'$ .

Setzt man  $y = f(x) :\iff (x, y) \in f$ , so erkennt man hier unsere alte Definition für eine Abbildung wieder.

Auf einer Menge  $M$  kann es sehr viele Relationen geben (genausoviele wie Teilmengen von  $M \times M$ ). Deshalb werden nur Relationen mit zusätzlichen Eigenschaften von Interesse sein. Bei der Auswahl dieser Eigenschaften orientieren wir uns an wichtigen mathematischen Beispielen, die wir z.T. schon kennengelernt haben.

## Ordnungsrelationen

Wir betrachten zunächst zwei schon bekannte Beispiele:

|    | $(\mathbb{R}, \leq)$                         | $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$                               |
|----|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 0) | $\leq$ ist eine Relation auf $\mathbb{R}$    | $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$          |
| 1) | $x \leq x$                                   | $U \subseteq U$                                             |
| 2) | $x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$    | $U \subseteq V \wedge V \subseteq U \implies U = V$         |
| 3) | $x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$ | $U \subseteq V \wedge V \subseteq W \implies U \subseteq W$ |
| 4) | es gilt stets $x \leq y$ oder $y \leq x$     | i.a. nichts entsprechendes                                  |

Wir nehmen dies zum Anlaß für die folgende Definition:

**(1.3) DEF:** Sei  $M$  eine Menge. Eine Relation  $\rho \subseteq M \times M$  heißt eine **Ordnungsrelation** (oder **partielle Ordnung** oder **Halbordnung**) auf  $M$ , wenn gilt:

- O<sub>1</sub>)**  $\forall x \in M : x \rho x$  ( $\rho$  ist **reflexiv**)
- O<sub>2</sub>)**  $\forall x, y \in M : (x \rho y \wedge y \rho x) \implies x = y$  ( $\rho$  ist **antisymmetrisch**)
- O<sub>3</sub>)**  $\forall x, y, z \in M : (x \rho y \wedge y \rho z) \implies x \rho z$  ( $\rho$  ist **transitiv**)

$(M, \rho)$  heißt dann auch eine **geordnete Menge**.

**Beispiele:**  $(\mathbb{R}, \leq)$ ,  $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ,  $(\mathbb{N}, |)$ ,  $(M, =)$

Während in  $(\mathbb{R}, \leq)$  je zwei Elemente bzgl.  $\leq$  vergleichbar sind, ist dies bei  $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$  i.a. nicht der Fall: Für  $M := \{1, 2\}$  gilt etwa  $\{1\} \not\subseteq \{2\}$  und  $\{2\} \not\subseteq \{1\}$ .

**(1.4) DEF:** Eine Ordnung  $\rho$  auf einer Menge  $M$  heißt **lineare Ordnung** (oder **totale Ordnung**), wenn gilt:

$$\mathbf{O}_4) \quad \forall x, y \in M : (x \rho y \vee y \rho x)$$

$(M, \rho)$  heißt dann eine **linear geordnete Menge**.

**Beispiele:**  $(\mathbb{R}, \leq)$  ist linear geordnet,  $(\mathcal{P}(\{1, 2\}), \subseteq)$  und  $(\mathbb{N}, |)$  sind nicht linear geordnet.

## Äquivalenzrelationen

Eine weitere wichtige Klasse von Relationen bilden die sog. Äquivalenzrelationen, die eng mit dem Abstraktionsprozeß in der Mathematik zusammenhängen.

**(1.5) DEF:** Eine Relation  $\rho$  auf einer Menge  $M$  heißt **Äquivalenzrelation auf  $M$** , wenn gilt:

$$\mathbf{\ddot{A}}_1) \quad \forall x \in M : x \rho x \quad (\mathbf{Reflexivität})$$

$$\mathbf{\ddot{A}}_2) \quad \forall x, y \in M : x \rho y \implies y \rho x \quad (\mathbf{Symmetrie})$$

$$\mathbf{\ddot{A}}_3) \quad \forall x, y, z \in M : (x \rho y \wedge y \rho z) \implies x \rho z \quad (\mathbf{Transitivität})$$

Der Unterschied zu einer Ordnungsrelation liegt nur in einer Bedingung: beide Relationen sind reflexiv und transitiv, eine Äquivalenzrelation ist symmetrisch, wohingegen eine Ordnungsrelation antisymmetrisch ist. Trotzdem werden wir wesentliche Unterschiede feststellen. Gilt  $x \rho y$ , so sagt man auch, daß  $x$  äquivalent ist zu  $y$  bzgl.  $\rho$ .

**Beispiele für Äquivalenzrelationen:**

- 6) Parallelität von Geraden der Ebene
- 7) Gleichheitsbeziehung zwischen den Elementen einer Menge
- 8) Äquivalenz von Matrizen
- 9) Ähnlichkeit von Matrizen
- 10) Gleichmächtigkeit auf einer Menge von Mengen
- 11) Isomorphie auf einer Menge von Gruppen
- 12) Kongruenzrelation modulo  $n$  auf  $\mathbb{Z}$

Für eine natürliche Zahl  $n$  ist die Kongruenzrelation  $K_n$  modulo  $n$  auf  $\mathbb{Z}$  definiert durch

$$a K_n b :\iff n \mid (a - b) \quad (\text{für alle } a, b \in \mathbb{Z})$$

Diese ist eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{Z}$ . Wir schreiben auch

$$a K_n b :\iff a \equiv b \pmod{n}$$

In der **Restklasse**  $[a]_n$  von  $a \in \mathbb{Z}$  modulo  $n$  liegen alle ganzen Zahlen, die bei Division durch  $n$  denselben Rest haben, d.h.

$$[a]_n = a + \mathbb{Z}n = \{b \mid b \in \mathbb{Z}, b \equiv a \pmod{n}\} = \{b \mid b \in \mathbb{Z}, b K_n a\}$$

Da es bei Division durch  $n$  die  $n$  nichtnegativen Reste  $0, 1, 2, \dots, n-1$  gibt, sind

$$[0]_n, [1]_n, [2]_n, \dots, [n-1]_n$$

alle Restklassen modulo  $n$ . Diese Bildung der Restklassen übertragen wir auf beliebige Äquivalenzrelationen:

**(1.6) DEF:**  $\rho$  sei eine Äquivalenzrelation auf einer Menge  $M$ . Für ein Element  $x \in M$  heißt die Menge

$$[x]_\rho := \{y \mid y \in M \wedge y \rho x\} \subseteq M$$

aller Elemente von  $M$ , die zu  $x$  bzgl.  $\rho$  äquivalent sind, die **Äquivalenzklasse von  $x$  bzgl.  $\rho$** . Die Menge  $M/\rho := \{[x]_\rho \mid x \in M\}$  aller Äquivalenzklassen von Elementen aus  $M$  bzgl.  $\rho$  heißt die **Quotientenmenge von  $M$  nach  $\rho$** .

Ein **vollständiges Repräsentantensystem** von  $M/\rho$  enthält aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element.

Die Menge  $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  enthält aus jeder Äquivalenzklasse von  $\mathbb{Z}/K_n = \mathbb{Z}_n$  genau ein Element, ist also ein vollständiges Repräsentantensystem von  $\mathbb{Z}_n$ . Hier gibt es unendlich viele solcher Systeme!

Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, um welche Äquivalenzrelation es sich handelt, so schreibt man auch nur  $[x]$  für die Äquivalenzklasse von  $x$ . Man mache sich klar:

$$[x] \in \mathcal{P}(M) \quad \text{und} \quad M/\rho \subseteq \mathcal{P}(M)$$