

§ 17 Der Fundamentalsatz der Algebra

Für den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra benötigen wir zwei Hilfsmittel aus der reellen Analysis:

(A) Jede nichtnegative reelle Zahl besitzt eine reelle Quadratwurzel.

(B) Jede Polynomabbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ungeraden Grades besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.

(17.1) LEMMA: Jede komplexe Zahl besitzt eine Quadratwurzel in $\mathbb{C}$.

(17.2) LEMMA: Es gibt keine Körpererweiterung $L : \mathbb{C}$ mit $[L : \mathbb{C}] = 2$.

(17.3) SATZ: Der Fundamentalsatz der Algebra

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen.

(17.4) BEM: C.F.Gauß hat als erster einen vollständigen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra gefunden, nachdem es viele Mathematiker vor ihm vergeblich versucht hatten. Seitdem gibt es ca. 100 mehr oder weniger unterschiedliche Beweisvarianten. Es ist jedoch kein Beweis bekannt, der nur mit algebraischen Methoden auskommt. Dagegen gibt es Beweise, die nur mit analytischen Methoden geführt werden können. Zum Beispiel läßt sich der Fundamentalsatz leicht mit dem Satz von Liouville aus der Funktionentheorie beweisen.