§ 13. Weitere Eigenschaften von Galois–Erweiterungen

In (12.6) hatten wir festgestellt, daß eine Galois–Erweiterung nur endlich viele Zwischenkörper besitzt. Wir wollen im folgenden zeigen, daß solche Körpererweiterungen **einfach** sind.

(13.1) LEMMA: Ist K ein **endlicher** Körper, so ist jede endliche Körpererweiterung $L : K$ einfach.

(13.2) LEMMA: K sei ein **unendlicher** Körper und $L : K$ eine Körpererweiterung . Es gebe Elemente $\alpha, \beta \in L$ mit $L = K(\alpha, \beta)$. Besitzt dann $L : K$ nur endlich viele Zwischenkörper , so existiert ein $a \in K$ mit $L = K(\alpha + a\beta)$. Insbesondere ist $L : K$ einfach.

(13.3) SATZ: Besitzt eine endliche Körpererweiterung $L : K$ nur endlich viele Zwischenkörper, so ist $L : K$ einfach.

Bew: Ist K endlich, so liefert (13.1) das Ergebnis, im anderen Falle basiert der Beweis auf (13.2) .

BEM: In Aufgabe 52 wird sogar gezeigt, daß jede Körpererweiterung mit nur endlich vielen Zwischenkörpern schon eine endliche Körpererweiterung sein muß , so daß die Voraussetzung in (13.3), daß $L : K$ endlich ist, entbehrlich ist.

(13.4) KOROLLAR: Jede Galois–Erweiterung ist einfach.

Bew: Eine Galois–Erweiterung ist nach Definition endlich und besitzt nach (12.6) nur endlich viele Zwischenkörper . •

Im folgenden wollen wir uns insbesondere überlegen, wie die Galois–Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ aussehen. Dazu behandeln wir in erster Linie Körper der Charakteristik 0 . Als wichtig erweist sich in diesem Zusammenhang die Frage, ob ein irreduzibles Polynom mehrfache Nullstellen haben kann oder nicht. Diese Frage hatte sich schon bei der Aufgabe 47 gestellt.

(13.5) DEF: Sei K ein Körper.

a) Ein Polynom $f \in K[T]$ vom Grade ≥ 1 heißt **separabel über** K , wenn jeder irreduzible Faktor von f nur einfache Nullstellen in einem Zerfällungskörper besitzt.

b) K heißt **vollkommen** , wenn jedes nichtkonstante Polynom separabel über K ist.

Ein separables Polynom kann durchaus mehrfache Nullstellen haben. Das separable Polynom $f = (T^2 - 2)^3 \in \mathbb{Q}[T]$ hat die beiden dreifachen Nullstellen $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$.

(13.6) LEMMA: Jeder Körper der Charakteristik 0 ist vollkommen .

(13.7) BEM: Man kann zeigen, daß auch jeder endliche Körper vollkommen ist. Dagegen sind unendliche Körper der Charakteristik p i.a. nicht vollkommen (s. Aufgabe 47).

(13.8) SATZ: Sei K ein beliebiger Körper. Für eine Körpererweiterung $L : K$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $L : K$ ist eine Galois–Erweiterung .

b) L ist der Zerfällungskörper eines separablen Polynoms aus $K[T]$.

(13.9) KOROLLAR: Sei K ein vollkommener Körper. Dann sind für eine Körpererweiterung $L : K$ folgende Aussagen äquivalent:

a) $L : K$ ist eine Galois–Erweiterung

b) L ist Zerfällungskörper eines nichtkonstanten Polynoms aus $K[T]$.

Damit sind insbesondere Galois–Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ Zerfällungskörper von nichtkonstanten Polynomen und umgekehrt.

(13.10) SATZ: Sei K ein vollkommener Körper. Ist dann $E : K$ eine endliche Körpererweiterung , so gibt es eine Galois–Erweiterung $L : K$ mit E als Zwischenkörper .