Einleitung

Es sollen kurz zwei Problemkreise beschrieben werden, deren Behandlung die Entwicklung der Algebra im Laufe des 19. Jahrhunderte maßgeblich beeinflußt und die Grundlagen für die heutige Algebra gelegt hat. Eine vollständige Lösung dieser Probleme werden wir dann im Laufe dieses Semesters kennenlernen.

Lösungsformeln für Gleichungen

$f \in \mathbb{Q}[T]$ sei ein normiertes Polynom vom Grade ≥ 1. Wir wollen die Frage untersuchen, ob sich die Nullstellen von f formelmäßig berechnen lassen.

grad(f)=1 : $f = T + q \in \mathbb{Q}[T]$
Die einzige Nullstelle ist $\alpha_1 = -q \in \mathbb{Q}$.

grad(f)=2 : $f = T^2 + pT + q \in \mathbb{Q}[T]$
Aus der Schulzeit ist sicher noch die folgende Formel für die Nullstellen von f bekannt, die man durch quadratische Ergänzung erhält. In Spezialfällen kommt sie schon bei den Babyloniern ca. 1900 v.Chr. vor!

$$\alpha_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Die Nullstellen von f lassen sich also aus den Koeffizienten von f durch rationale Rechenoperationen und Wurzelziehen berechnen.

grad(f)=3 : Durch die Substitution $T = T - \dfrac{a}{3}$ wird aus dem Polynom $T^3 + aT^2 + bT + c \in \mathbb{Q}[T]$ ein Polynom der Form $f = T^3 + pT + q$, in dem das quadratische Glied verschwindet.

ERGEBNIS: Cardano (1545), Tartaglia (1515)

Die Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des Polynoms $f = T^3 + pT + q$ lassen sich folgendermaßen angeben:
$\alpha_1 = a + b$, $\alpha_2 = \varepsilon^2 a + \varepsilon b$, $\alpha_3 = \varepsilon a + \varepsilon^2 b$

mit $a = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}$, $b = \dfrac{p}{3a}$ und $\varepsilon = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} i\sqrt{3}$ $(\varepsilon^3 = 1)$.

grad(f)=4 : Durch die Substitution $T = T - \dfrac{a}{4}$ wird aus dem Polynom $T^4 + aT^3 + bT^2 + cT + d \in \mathbb{Q}[T]$ ein Polynom der Form $f = T^4 + pT^2 + qT + r \in \mathbb{Q}[T]$. Die Nullstellen dieses Polynoms lassen sich formelmäßig bestimmen, wobei dieser Fall auf den kubischen Fall zurückgeführt wird. Eine erste Lösung stammt von **Ferrari (1540)** .

grad(f) $\geq$ 5 : Es wurde lange Zeit vergeblich versucht, auch für Gleichungen vom Grade ≥ 5 allgemeine Lösungsformeln zu finden, bis sich herausstellte, daß dies unmöglich ist.

Abel (1802–1829) bewies **1824** , daß es für "allgemeine Gleichungen" vom Grade ≥ 5 keine Lösungsformeln geben kann.

Galois (1811–1832) gab **1832** konkrete Beispiele für solche Gleichungen an.

Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal

Die drei klassischen Probleme:

Das Delische Problem (Verdoppelung des Würfels)

Gegeben sei die konstruierbare Seitenlänge a eines Würfels. Ist es dann möglich, die Seitenlänge b eines Würfels mit dem doppelten Volumen zu konstruieren?

Antwort: Nein

Die Quadratur des Kreises

Gegeben sei ein Kreis mit dem Radius $r = 1$. Ist es dann möglich, die Seitenlänge a eines flächengleichen Quadrates zu konstruieren?

Antwort: Nein

Die Dreiteilung eines beliebigen Winkels

Gegeben sei ein beliebiger konstruierbarer Winkel. Ist es dann möglich, diesen Winkel mit Zirkel und Lineal in drei gleichgroße Winkel zu teilen?

Antwort: I.a. Nein

Die Konstruierbarkeit des regelmäßigen n–Ecks

Satz: Für eine Primzahl $p \geq 3$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Das regelmäßige p–Eck ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar

b) $p - 1$ ist eine Zweierpotenz

c) p ist eine Fermat'sche Primzahl .

Zahlen der Form $F_n = 2^{2^n} + 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ heißen **Fermat'sche Zahlen**, die Primzahlen unter diesen **Fermat'sche Primzahlen**. Für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ist F_n eine Primzahl. Fermat (1601–1665) vermutete, daß alle F_n Primzahlen sind. Dann zeigte jedoch Euler (1707–1783), daß F_5 keine Primzahl ist $(641 | F_5)$. Weitere Fermat'sche Primzahlen sind bisher nicht gefunden worden. Auch ist nicht bekannt, ob es überhaupt unendlich viele Fermat'sche Primzahlen gibt.

n	$F_n = 2^{2^n} + 1$	prim
0	3	ja
1	5	ja
2	17	ja
3	257	ja
4	65 537	ja
5	4 294 967 297	$= 641 \times 6\,700\,417$

Für die 5 bekannten Fermat'schen Primzahlen ist die Konstruktion des regelmäßigen p–Ecks durchgeführt worden:

3–Eck,5–Eck	bereits im Altertum bekannt
17–Eck	Gauß (1796)
257–Eck	Richelot (1832)
65 537–Eck	Hermes (1879–1889)