

Lösung 36. Aufgabe

Vollständige Induktion nach $n := \text{grad}(f) \geq 1$. Sei $Z := \text{ZFK}_K(f)$.

(IA) $n=1$ In diesem Fall hat f genau eine Nullstelle in K , d.h. $Z = K$ und $[Z : K] = 1 \leq 1!$

(IV) Sei $n > 1$ beliebig und die Behauptung richtig für alle Körper K' und alle Polynome aus $K'[T]$ vom Grade $n-1$.

Sei K ein beliebiger Körper, $f \in K[T]$ ein Polynom vom Grade n und $Z = \text{ZFK}_K(f)$. Sei $\alpha \in Z$ eine Nullstelle von f . Diese spaltet einen Linearfaktor von f ab:

$$f = (T - \alpha) \cdot g \quad \text{mit} \quad g \in K(\alpha)[T], \quad \text{grad}(g) = n - 1$$

Da f über Z in Linearfaktoren zerfällt, gilt dies auch für g :

$$f = (T - \alpha) \cdot (T - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (T - \alpha_n) = (T - \alpha) \cdot g \implies g = (T - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (T - \alpha_n).$$

Wegen $Z = K(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (K(\alpha))(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ist dann Z auch ein ZFK von g über $K(\alpha)$. Es gilt also

$$g \in K(\alpha)[T], \quad \text{grad}(g) = n - 1, \quad Z = \text{ZFK}_{K(\alpha)}(g),$$

so daß nach (IV)

$$[Z : K(\alpha)] \leq (n - 1)!$$

folgt. Da das Minimalpolynom m_α von α über K das Polynom f teilt, gilt

$$[K(\alpha) : K] = \text{grad}(m_\alpha) \leq \text{grad}(f) = n.$$

Der **Gradsatz** liefert nun für $Z \supseteq K(\alpha) \supseteq K$

$$[Z : K] = [Z : K(\alpha)] \cdot [K(\alpha) : K] \leq (n - 1)! \cdot n = n!$$