

Aufgabe 56

Bemerkung. Für alle $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $n \nmid k$ gilt

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)^j = 0 \quad (1)$$

Beweis. Wegen $n \nmid k$ ist $e^{\frac{2k\pi i}{n}} \neq 1$, und mit der endlichen geometrischen Reihe rechnet man

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)^j = \frac{\left(e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)^n - 1}{e^{\frac{2k\pi i}{n}} - 1} = \frac{e^{2k\pi i} - 1}{e^{\frac{2k\pi i}{n}} - 1} = \frac{1 - 1}{e^{\frac{2k\pi i}{n}} - 1} = 0$$

□

Seien $f = T^3 - 3T + 1 \in \mathbb{Q}[T]$ und $Z := \text{ZFK}_{\mathbb{Q}}(f) \subseteq \mathbb{C}$.

a) Wegen $\text{char}(\mathbb{Q}) = 0$ ist $\mathbb{Q}$ nach (13.6) vollkommen. Da f nicht konstant ist, folgt mit (13.9), dass $Z : \mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist.

b) Im Folgenden bezeichnen $\epsilon := e^{\frac{2\pi i}{9}}$ und $\eta := e^{\frac{2\pi i}{3}}$ eine primitive 9. bzw. 3. Einheitswurzel, wobei $\eta = \epsilon^3$ gilt. Setze $\alpha := \frac{2\pi}{9}$. Für den komplexen Kosinus gilt

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Daraus folgt

$$2 \cos(k\alpha) = 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{9}\right) = e^{\frac{2k\pi i}{9}} + e^{-\frac{2k\pi i}{9}} = \epsilon^k + \epsilon^{-k} \quad (2)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und insbesondere $\alpha_1 = 2 \cos(\alpha) = \epsilon + \epsilon^{-1}$. Für $k \in \mathbb{N}$ rechnet man

$$\begin{aligned} f(\epsilon^k + \epsilon^{-k}) &= (\epsilon^k + \epsilon^{-k})^3 - 3(\epsilon^k + \epsilon^{-k}) + 1 \\ &= (\epsilon^3)^k + (\epsilon^3)^{-k} + 1 \\ &= \eta^k + \eta^{-k} + 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Mit $\eta^{-1} = \eta^2$ erhält man dann $f(\alpha_1) = f(\epsilon + \epsilon^{-1}) = 1 + \eta + \eta^2 \stackrel{(1)}{=} 0$.

c) Setze $\alpha_2 := 2 \cos(2\alpha)$ und $\alpha_3 := 2 \cos(4\alpha)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(\alpha_2) &= f(2 \cos(2\alpha)) \stackrel{(2)}{=} f(\epsilon^2 + \epsilon^{-2}) \stackrel{(3)}{=} \underbrace{\eta^2 + \eta^{-2}}_{=1} + 1 \stackrel{(1)}{=} 0 \\ f(\alpha_3) &= f(2 \cos(4\alpha)) \stackrel{(2)}{=} f(\epsilon^4 + \epsilon^{-4}) \stackrel{(3)}{=} \underbrace{\eta^4}_{=1} + \underbrace{\eta^{-4}}_{=\eta^2} + 1 \stackrel{(1)}{=} 0. \end{aligned}$$

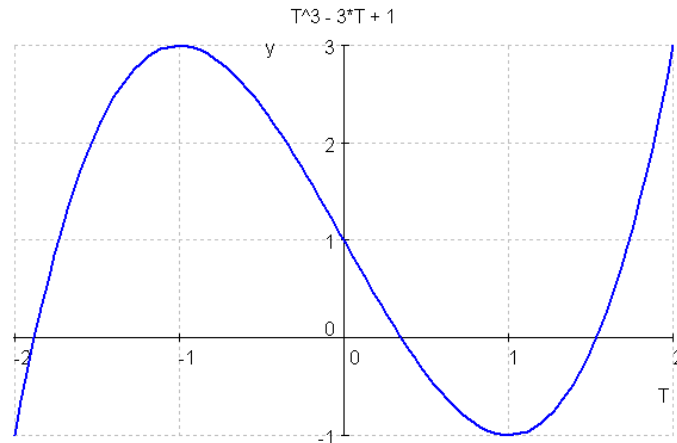


Abbildung 1: Funktionsgraph des Polynoms $T^3 - 3T + 1$

Die Nullstellen α_2 und α_3 von f lassen sich in Abhängigkeit von α_1 darstellen:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \epsilon^2 + \epsilon^{-2} = (\epsilon + \epsilon^{-1})^2 - 2 = \alpha_1^2 - 2 \\ \alpha_3 &= \epsilon^4 + \epsilon^{-4} = (\epsilon^2 + \epsilon^{-2})^2 - 2 = \alpha_2^2 - 2 = \alpha_1^4 - 4\alpha_1^2 + 2\end{aligned}$$

Da f höchstens $\text{grad}(f) = 3$ Nullstellen besitzt, sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ alle Nullstellen von f :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2 \cos(\alpha) = \epsilon + \epsilon^{-1} \\ \alpha_2 &= 2 \cos(2\alpha) = \epsilon^2 + \epsilon^{-2} = \alpha_1^2 - 2 \\ \alpha_3 &= 2 \cos(4\alpha) = \epsilon^4 + \epsilon^{-4} = \alpha_2^2 - 2 = \alpha_1^4 - 4\alpha_1^2 + 2\end{aligned}$$

d) Es gilt $Z = \text{ZFK}_{\mathbb{Q}}(f) = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_1^2 - 2, \alpha_1^4 - 4\alpha_1^2 + 2) = \mathbb{Q}(\alpha_1)$. Da das Polynom f keine Nullstellen in $\mathbb{Q}$ besitzt und $\text{grad}(f) = 3$ gilt, ist f nach (5.1c) irreduzibel über $\mathbb{Q}$. Da α_1 Nullstelle von f ist, sieht man mit (7.6), dass f das Minimalpolynom von α_1 über $\mathbb{Q}$ ist, und somit erhält man

$$[Z : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}] = \text{grad}(f) = 3.$$

Nach Teil a) ist $Z : \mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung, und somit gilt $|G| = [Z : \mathbb{Q}] = 3 \in \mathbb{P}$. Damit ist G isomorph zu A_3 , der bis auf Isomorphie einzigen Gruppe der Ordnung 3.

e) Da die Körpererweiterung $Z : \mathbb{Q}$ vom Grade $3 \in \mathbb{P}$ ist, besitzt sie nach (6.5b) keine echten Zwischenkörper, d.h. Z und $\mathbb{Q}$ sind alle Zwischenkörper von $Z : \mathbb{Q}$. Den Hauptsatz der Galois-Theorie muss man an dieser Stelle nicht bemühen.

□