

ALGEBRA (SS 2006)

Abgabe: Do. 8.6.2006, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: <http://math-www.uni-paderborn.de/~chris>

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel-Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

37. Aufgabe: Seien $\alpha := \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$ und $L := \mathbb{Q}(\alpha)$. Beweise, daß durch die Vorschrift

$$\sigma(a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3) := a_0 - a_1\alpha + a_2\alpha^2 - a_3\alpha^3 \quad (a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q})$$

eine Abbildung $\sigma : L \longrightarrow L$ definiert wird, die ein $\mathbb{Q}$ -Automorphismus von L ist. (3)

38. Aufgabe: Sei $L : K$ eine Körpererweiterung. Bestimme in den folgenden Fällen die Elemente von $G := \text{Gal}(L : K)$, die Ordnung und den Isomorphietyp von G und den Grad von $L : K$:

a) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\varepsilon)$ mit $\varepsilon := e^{\frac{2\pi i}{5}} \in \mathbb{C}$

b) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$

c) $K = \mathbb{Z}_2$, $L = \text{ZFK}_{\mathbb{Z}_2}(T^3 + T^2 + 1)$ (s. Aufgabe 34)

d) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{6})$. Bestimme hier außerdem für einen frei wählbaren $\mathbb{Q}$ -Automorphismus $\sigma \in G \setminus \{id_L\}$ den Bildwert $\sigma(\sqrt[3]{6} + 2\sqrt{6})$. (8)

39. Aufgabe: $L : K$ und $L' : K$ seien Körpererweiterungen. $\rho : L \longrightarrow L'$ sei ein K -Isomorphismus, d.h. ein bijektiver, K -linearer Körperhomomorphismus. Beweise:

$$(\text{Gal}(L : K), \circ) \cong (\text{Gal}(L' : K), \circ) \quad (\text{Gruppenisomorphie})$$

(2)

40. Aufgabe: $L : K$ sei eine Körpererweiterung. Beweise:

a) Ist $\alpha \in L$ transzendent über K , so gilt $K \subset K(\alpha^2) \subset K(\alpha)$ (hierbei bedeutet $\subset$ "echte Inklusion").

b) Besitzt $L : K$ keinen echten Zwischenkörper, so ist $L : K$ einfach und endlich. (3)

41*. Aufgabe: Sei $p \in \mathbb{P}$ und $Z \subseteq \mathbb{C}$ der ZFK von $f := T^p - 1 \in \mathbb{Q}[T]$.

a) Bestimme die Elemente von Z und den Grad $[Z : \mathbb{Q}]$.

b) Bestimme die Elemente aus $G := \text{Gal}(Z : \mathbb{Q})$, die Ordnung und den Isomorphietyp von G . (3*)