8. Übungsblatt

ALGEBRA (SS 2006)

Abgabe: Do. 1.6.2006, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/~ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

32. Aufgabe: K und L seien Körper, und es sei $\rho : K[T] \longrightarrow L[T]$ ein Ringisomorphismus mit der Eigenschaft $\operatorname{grad}(g) = \operatorname{grad}(\rho(g)) \quad (\forall\, g \in K[T] \setminus \{0\})$. Ferner sei $f \in K[T]$ ein beliebiges Polynom. Beweise:

$$f \text{ irreduzibel über } K \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(f) \text{ irreduzibel über } L\,.$$

(3)

33. Aufgabe: Bestimme in den folgenden Fällen den ZFK Z des Polynoms $f \in \mathbb{Q}[T]$ und den Grad $[Z : \mathbb{Q}]$:

a) $f = T^3 - 2 \in \mathbb{Q}[T]$

b) $f = T^5 - 1 \in \mathbb{Q}[T]$

c) $f = T^4 - 10T^2 + 1 \in \mathbb{Q}[T]$. (6)

34. Aufgabe: Sei $f = T^3 + T^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[T]$, und bezeichne Z den ZFK von f über $\mathbb{Z}_2$. Beweise:

a) f ist irreduzibel über $\mathbb{Z}_2$

b) f besitzt nur einfache Nullstellen in Z (dies ist ohne Kenntnis der Nullstellen zu begründen!)

c) Ist $\alpha \in Z$ eine beliebige Nullstelle von f, so gilt $Z = \mathbb{Z}_2(\alpha)$. Wie groß ist der Grad $[Z : \mathbb{Z}_2]$? (4)

35. Aufgabe: $L : K$ sei eine Körpererweiterung, und das Element $\alpha \in L$ sei transzendent über K. Beweise, daß die folgenden Elemente aus L wieder transzendent über K sind:

a) $a + \alpha \quad (a \in K) \quad , \quad b\alpha \quad (b \in K^\star)$

b) $\alpha^2 \quad , \quad \alpha^{-1}$. (3)

36*. Aufgabe: K sei ein Körper und $f \in K[T]$ sei ein Polynom vom Grade $n \geq 1$. Beweise:

$$[\mathrm{ZFK}_K(f) : K] \;\leq\; n!$$

Hinweis: Induktion nach n. (3*)