7. Übungsblatt

ALGEBRA (SS 2006)

Abgabe: Fr. 26.5.2006, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!
Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

27. Aufgabe: Sei $M := \{0, 1, \frac{1}{5} + \frac{1}{3}i\} \subseteq \mathbb{C}$.

a) Bestimme die Anzahl der Elemente aus $\mathcal{F}(M)$.

b) Stelle $\mathcal{K}_{el}(M)$ zeichnerisch dar. (3)

28. Aufgabe: a) Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ mit $0, 1 \in M$. Beweise, daß sich eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ genau dann mit Zirkel und Lineal aus M konstruieren läßt, wenn der Real– und der Imaginärteil von z mit Zirkel und Lineal aus M konstruierbar sind.

b) Untersuche, ob sich die Zahl $z = \sqrt[6]{7} + i\sqrt{2}$ mit Zirkel und Lineal aus $M := \{0, 1\}$ konstruieren läßt. (3)

29. Aufgabe: Sei $L : K$ eine Körpererweiterung. Die Elemente $\alpha, \beta \in L$ seien algebraisch über K mit $\mathrm{grad}_K(\alpha) = m$ und $\mathrm{grad}_K(\beta) = n$. Beweise:

a) $[K(\alpha, \beta) : K] \leq mn$

b) $\mathrm{ggT}(m, n) = 1 \implies [K(\alpha, \beta) : K] = mn$

c) Gib ein konkretes Beispiel mit $[K(\alpha, \beta) : K] < mn$ an. (5)

30. Aufgabe: Für eine Körpererweiterung $L : K$ bezeichne $\mathcal{A}_K(L)$ die Menge aller über K algebraischen Elemente aus L.

a) Beweise, daß $\mathcal{A}_K(L)$ ein Zwischenkörper von $L : K$ ist.

b) Untersuche, ob die Körpererweiterung $\mathcal{A}_K(L) : K$ algebraisch ist.

c) Beweise, daß die Körpererweiterung $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) : \mathbb{Q}$ nicht endlich ist.

d) Leite aus c) her, daß $\mathbb{R} : \mathbb{Q}$ eine unendliche Körpererweiterung ist. (5)

31*. Aufgabe: R und S seien kommutative Ringe, $I \subseteq R$ und $J \subseteq S$ seien Ideale, und es bezeichnen $\nu_I : R \longrightarrow R/I$ und $\nu_J : S \longrightarrow S/J$ die natürlichen Ringhomomorphismen. Ferner sei $f : R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus mit $f(I) \subseteq J$.

a) Beweise: Es gibt genau einen Ringhomomorphismus $f^\star : R/I \longrightarrow S/J$ mit der Eigenschaft $f^\star \circ \nu_I = \nu_J \circ f$.

b) Beweise: f surjektiv $\implies$ $f^\star$ surjektiv.

c) Unter welchen Voraussetzungen ist $f^\star$ injektiv?

d) Was läßt sich in b) oder c) zu der Umkehrung sagen? (3*)