

ALGEBRA (SS 2006)

Abgabe: Do. 18.5.2006, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: <http://math-www.uni-paderborn.de/~chris>

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel-Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

22. Aufgabe: $L : K$ sei eine Körpererweiterung. Beweise:

- a) Sind M und N Teilmengen von L mit $M \subseteq N$, so folgt $K(M) \subseteq K(N)$.
- b) Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ Elemente aus L ($n \geq 2$), so folgt $(K(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}))(\alpha_n) = K(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$. (2)

23. Aufgabe: a) Bestimme die Grade $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$ und $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]$.

b) Sei $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Beweise: $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

c) Bestimme das Minimalpolynom von $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$. (6)

24. Aufgabe: Sei $L : K$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ sei algebraisch über K . Im folgenden wird ein Verfahren zur Bestimmung des Inversen $x^{-1} \in K[\alpha]$ eines Elementes $0 \neq x \in K[\alpha]$ angegeben. Nach Voraussetzung gibt es ein Polynom $0 \neq f \in K[T]$ mit $x = f(\alpha)$. Beweise:

- a) Das Minimalpolynom m_α von α über K und das Polynom f sind teilerfremd, d.h. ein ggT ist assoziiert zum Einselement.
- b) Es gibt Polynome $s, t \in K[T]$ mit $s \cdot f + t \cdot m_\alpha = 1$.
- c) Es gilt $x^{-1} = s(\alpha)$. (4)

25. Aufgabe: Sei $\alpha := \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$. Berechne mit Hilfe des in Aufgabe 24 beschriebenen Verfahrens **ohne** Benutzung eines CA-Systems das Inverse von $x := 1 + 2\alpha + \alpha^2 \in \mathbb{Q}[\alpha]$. x^{-1} ist als Element aus $\mathbb{Q}[\alpha]$ darzustellen, und das Ergebnis ist zu verifizieren! (4)

26*. Aufgabe: Hier soll ein Spezialfall des Lemmas von Gauß (5.4) bewiesen werden.

Sei $f = \sum_{\nu=0}^n a_\nu T^\nu \in \mathbb{Z}[T] \setminus \{0\}$. Dann heißt $I(f) := \text{ggT}(a_0, a_1, \dots, a_n)$ der **Inhalt von** f . Das Polynom f heißt **primitiv**, wenn $I(f) = 1$ gilt. Beweise:

- a) Zu $0 \neq f \in \mathbb{Z}[T]$ gibt es ein primitives Polynom $f^* \in \mathbb{Z}[T]$ mit $f = I(f) \cdot f^*$.
- b) Ist $f \in \mathbb{Z}[T]$ primitiv, so gilt: f irreduzibel über $\mathbb{Q} \implies f$ irreduzibel über $\mathbb{Z}$.
- c) Sind die Polynome $f, g \in \mathbb{Z}[T]$ primitiv, so ist auch das Polynom $f \cdot g$ primitiv (**Hinweis:** Aufgabe 21* d) könnte hilfreich sein!).
- d) Ist $0 \neq f \in \mathbb{Z}[T]$ und gilt $f = g \cdot h$ mit $g, h \in \mathbb{Q}[T]$, so gibt es primitive Polynome $g^*, h^* \in \mathbb{Z}[T]$ und $c \in \mathbb{Z}$ mit $f = c \cdot g^* \cdot h^*$.
- e) Ist $f \in \mathbb{Z}[T]$ ($\text{grad}(f) \geq 1$) irreduzibel über $\mathbb{Z}$, so ist f auch irreduzibel über $\mathbb{Q}$. (3*)