5. Übungsblatt

ALGEBRA (SS 2006)

Abgabe: Do. 11.5.2006, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!
Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

19. Aufgabe: Untersuche die folgenden Polynome auf Irreduzibilität (natürlich mit ausreichenden Begründungen!):

a) $f_1 = 2T^5 + 15T^3 - 12T^2 + 9T - 6 \in \mathbb{Q}[T]$

b) $f_2 = T^5 + 5T^4 - 3T^3 + 2T^2 + T - 6 \in \mathbb{Q}[T]$

c) $f_3 = T^3 - T^2 - 5T + 7 \in \mathbb{Z}[T]$

d) Beweise explizit, daß das Polynom $f_4 = T^4 - 16T^2 + 4 \in \mathbb{Z}[T]$ keinen nichttrivialen Teiler aus $\mathbb{Z}[T]$ vom Grade 0,1 oder 2 besitzt. Ist f_4 irreduzibel über $\mathbb{Q}$? Ist f_4 irreduzibel über $\mathbb{R}$? (8)

20. Aufgabe: R und S seien kommutative Ringe $\neq 0$, und $\alpha : R \longrightarrow S$ sei ein Ringhomomorphismus . T sei eine Unbestimmte über R und U eine Unbestimmte über S. Die Abbildung $\overline{\alpha} : R[T] \longrightarrow S[U]$ sei definiert durch $\overline{\alpha}(f) := \sum_{i=0}^{m} \alpha(r_i)U^i$ für $f = \sum_{i=0}^{m} r_i T^i \in R[T]$. Beweise:

a) $\overline{\alpha}$ ist ein Ringhomomorphismus mit $\overline{\alpha}(r) = \alpha(r) \ \forall r \in R$ und $\overline{\alpha}(T) = U$.

b) $\overline{\alpha}$ injektiv $\Longleftrightarrow$ α injektiv.

c) $\overline{\alpha}$ injektiv $\Longrightarrow$ $\mathrm{grad}(\overline{\alpha}(f)) = \mathrm{grad}(f) \ \forall f \in R[T] \setminus \{0_R\}$.

d) $\overline{\alpha}$ surjektiv $\Longleftrightarrow$ α surjektiv.

e) Sei $f \in R[T]$. Untersuche, ob die folgenden Implikationen immer gültig sind:

- **i)** f irreduzibel (über R) $\Longrightarrow$ $\overline{\alpha}(f)$ irreduzibel (über S)
- **ii)** $\overline{\alpha}(f)$ irreduzibel (über S) $\Longrightarrow$ f irreduzibel (über R). (8)

21*. Aufgabe: R sei ein kommutativer Ring $\neq 0$.

Definition: Ein Ideal $I \subseteq R$ heißt ein **Primideal von** R, wenn gilt:
i) $I \neq R$ und **ii)** $\forall a, b \in R : ab \in I \Longrightarrow a \in I \vee b \in I$.

Beweise:

a) Ein Ideal $I \subseteq R$ ist genau dann ein Primideal, wenn der Faktorring R/I ein IB ist.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Genau dann ist (n) ein Primideal in $\mathbb{Z}$, wenn n eine Primzahl ist.

c) Jedes maximale Ideal ist ein Primideal. Untersuche, ob auch die Umkehrung gilt.

d) Für ein Ideal $I \subseteq R$ bezeichne $I[T]$ die Menge aller Polynome aus $R[T]$, deren Koeffizienten sämtlich in I liegen. Dann gilt:

- **1)** $I[T]$ ist ein Ideal in $R[T]$
- **2)** Der Faktorring $R[T]/I[T]$ ist isomorph zu dem Polynomring $(R/I)[T]$.
- **3)** I ist genau dann ein Primideal in R, wenn $I[T]$ ein Primideal in $R[T]$ ist. (3*)