4. Übungsblatt

ALGEBRA (SS 2006)

Abgabe: Do. 4.5.2006, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/~chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!
Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

14. Aufgabe: Beweise, daß ein endlicher Körper nicht algebraisch abgeschlossen sein kann.

Hinweis: Lasse Dich von dem Beweis des Satzes von Euklid ("Es gibt unendlich viele Primzahlen") inspirieren! (2)

15. Aufgabe: Sei $f \in \mathbb{R}[T]$ ein Polynom. Beweise:

a) $\forall\, z \in \mathbb{C} \,:\, \overline{f(z)} = f(\overline{z})$.

b) Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle von f, so ist auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von f, und es gibt Polynome $g, h \in \mathbb{R}[T]$ mit $f = gh$ und $\mathrm{grad}(g) = 2$.

c) f ist genau dann irreduzibel über $\mathbb{R}$, wenn entweder **1)** $\mathrm{grad}(f) = 1$ gilt oder wenn
2) $\mathrm{grad}(f) = 2$ gilt und f keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat. (5)

16. Aufgabe: a) Sei $f = \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu T^\mu \in \mathbb{Z}[T]$ ein Polynom vom Grade m und $c = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ $(r, s \in \mathbb{Z},$ $s \neq 0, \mathrm{ggT}(r, s) = 1)$ eine rationale Nullstelle von f. Beweise:

i) r ist ein Teiler von a_0 und s ein Teiler von a_m.

ii) Ist darüberhinaus f normiert, so folgt $c \in \mathbb{Z}$ und c teilt a_0.

b) Bestimme die Zerlegung des Polynoms

$$f \;:=\; T^{10} - 2T^8 - T^9 + 2T^7 - 3T^6 + 6T^4 + 3T^5 - 6T^3$$

in ein Produkt von irreduziblen Polynomen über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$

(**Hinweis:** Erforderliche Polynomdivisionen (und **nur** diese) dürfen mit einem CA–System (wie MuPAD oder MAPLE) berechnet werden. Außerdem darf an keiner Stelle **geraten** werden!) (5)

17. Aufgabe: Es sei R ein IB und $g \in R[T]$. $E_g : R[T] \longrightarrow R[T]$ bezeichnet den Einsetzungshomomorphismus $(f \longmapsto f(g))$. Beweise:

a) E_g Ringisomorphismus $\iff$ es gibt $a, b \in R, a \in R^\star$ mit $g = aT + b$.

b) Sei $g = aT + b \in R[T]$ mit $a \in R^\star$. Dann gilt für ein Polynom $f \in R[T]$:

$$f \text{ irreduzibel in } R[T] \iff E_g(f) \text{ irreduzibel in } R[T]$$

(4)

18*. Aufgabe: Konstruiere einen Zerfällungskörper Z des Polynoms $f := T^2 + 1$ über $\mathbb{Q}$ und gib dabei eine genaue Beschreibung der Elemente von Z. Was ist ein ZFK von f über $\mathbb{R}$ bzw. über $\mathbb{C}$? (3*)