3. Übungsblatt

ALGEBRA (SS 2006)

Abgabe: Do. 27.4.2006, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/~chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.
Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

Definition: R sei ein kommutativer Ring. Ein Ideal I von R heißt **maximal**, wenn gilt:
i) $I \neq R$ und **ii)** Für jedes Ideal $J \subseteq R$ mit $I \subseteq J \subseteq R$ folgt $J = I$ oder $J = R$.

9. Aufgabe: a) Sei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl. Beweise, daß das Ideal $(p) = \mathbb{Z}p = \{kp | k \in \mathbb{Z}\}$ ein maximales Ideal in $\mathbb{Z}$ ist.

b) K sei ein Körper und $R := K[T]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über K (wir wissen, daß $K[T]$ ein Hauptidealbereich ist!). Ferner sei $f \in R$ ein irreduzibles Polynom. Beweise, daß das Ideal $(f) = Rf = \{gf | g \in R\}$ ein maximales Ideal in R ist. (4)

10. Aufgabe: R sei ein kommutativer Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal. Beweise:

a) I ist genau dann ein maximales Ideal, wenn gilt: $I \neq R$ und zu jedem $x \in R \setminus I$ gibt es $y \in R$ und $a \in I$ mit $1 = xy + a$.

b) I ist genau dann ein maximales Ideal, wenn der Faktorring R/I ein Körper ist.

c) Das Nullideal 0 ist genau dann ein maximales Ideal in R ist, wenn R ein Körper ist. (5)

11. Aufgabe: Es sei R ein kommutativer Ring. Ohne Beweis darf benutzt werden, daß für $a, b \in R$ und $n \in \mathbb{N}$

die binomische Formel $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

gilt (man mache sich diese Formel einmal für $n = 2$ und $n = 3$ klar!). Beweise:

a) Ist p eine Primzahl, so ist p ein Teiler von $\binom{p}{k}$ für alle $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

b) Ist K ein Körper der Charakteristik p (Primzahl), so gilt:

1) $(a+b)^p = a^p + b^p$ für alle $a, b \in K$.

2) Die Abbildung $\varphi_K : K \longrightarrow K$, $a \longmapsto a^p$, ist ein injektiver Körperhomomorphismus.

3) Ist K endlich, so ist φ_K ein Körperisomorphismus. (4)

12. Aufgabe: a) Beweise, daß jeder Körper der Charakteristik 0 unendlich ist.

b) Beweise, daß jeder endliche Körper eine Primzahl als Charakteristik hat.

c) Finde einen unendlichen Körper, dessen Charakteristik eine Primzahl p ist. (3)

Eine **sehr schöne** Sonderaufgabe steht noch auf der nächsten Seite!

13*. Aufgabe: Beweise, daß das Ideal $\mathcal{N}$ der Nullfolgen in dem kommutativen Ring $\mathcal{CF}$ aller Cauchy–Folgen rationaler Zahlen ein maximales Ideal ist (vgl. Satz (2.14). Nach Aufgabe 10b) ist dann der Faktorring $\mathbb{R} = \mathcal{CF}/\mathcal{N}$ ein Körper!) . Der Beweis ist nicht ganz einfach, daher folgt eine Anleitung:

Klar ist $\mathcal{N} \neq \mathcal{CF}$. Sei $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{CF}$ ein Ideal mit $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{CF}$. Zu zeigen ist $\mathcal{J} = \mathcal{N}$ oder $\mathcal{J} = \mathcal{CF}$.

Setzen wir $\mathcal{J} \neq \mathcal{N}$ voraus, so müssen wir $\mathcal{J} = \mathcal{CF}$ zeigen. Es gibt dann also eine Folge $(a_n) \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{N}$. Definiere jetzt mit Hilfe dieser Folge (a_n) eine neue Folge (b_n) durch die Vorschrift

$$b_n \ := \begin{cases} 0 & \text{falls } a_n \neq 0 \\ \dfrac{1}{n} & \text{falls } a_n = 0 \end{cases}$$

Beweise nun die folgenden Aussagen:

1) $(b_n) \in \mathcal{N}$

2) $a_n + b_n \neq 0 \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$

3) $(a_n + b_n) \in \mathcal{CF} \setminus \mathcal{N}$

4) Es gibt ein $\delta \in \mathbb{Q}$, $\delta > 0$ mit der Eigenschaft $|a_n + b_n| \ > \ \delta \ \ (\forall\, n \in \mathbb{N})$

5) Durch $c_n := \dfrac{1}{a_n + b_n}$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ wird eine Cauchy–Folge $(c_n) \in \mathcal{CF}$ definiert.

Ist nun (x_n) eine beliebige Cauchy–Folge aus $\mathcal{CF}$, so beweise man

$$(x_n) \ = \ (a_n + b_n) \cdot (c_n) \cdot (x_n) \ \in \ \mathcal{J}$$

Damit ist dann $\mathcal{J} = \mathcal{CF}$ bewiesen!!! (3*)