2. Übungsblatt

ALGEBRA (SS 2006)

Abgabe: Do. 20.4.2006, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.
Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

5. Aufgabe: **a)** R sei ein nullteilerfreier Ring. Beweise, daß in R die folgende Kürzungsregel für die Multiplikation gilt: $x, y, z \in R : xy = xz$ und $x \neq 0 \implies y = z$.

b) Beweise, daß sich jede rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ eindeutig in der Form $x = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ darstellen läßt.

c) Sei K ein Körper (K ist dann insbesondere ein IB). Bestimme den Quotientenkörper von K.

d) Bestimme den Quotientenkörper eines endlichen IB's R. (4)

6. Aufgabe: Beweise:

a) Die Relation ρ aus Lemma (2.7) ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

b) Die in (2.9a) definierte Addition auf $\mathbb{Q}$ ist wohldefiniert.

c) Die in (2.9b) definierte Relation auf $\mathbb{Q}$ ist wohldefiniert, eine lineare Ordnungsrelation auf $\mathbb{Q}$ und ist mit der Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ verträglich. (8)

7. Aufgabe: **a)** Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. Beweise, daß eine Teilmenge $V \subseteq M$ genau dann ein vollständiges Repräsentantensystem für die Quotientenmenge M/R ist, wenn gilt: i) $\forall x \in M \, \exists v \in V : xRv$ und ii) $\forall v, v' \in V : vRv' \implies v = v'$.

b) Sei S die Äquivalenzrelation der Äquivalenz auf der Menge $\mathrm{M}_{m,n}(K)$ der $(m \times n)$-Matrizen über einem Körper K. Bestimme ein vollständiges Repräsentantensystem für die Quotientenmenge $\mathrm{M}_{m,n}(K)/S$.

c) Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation der Gleichmächtigkeit auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Bestimme ein vollständiges Repräsentantensystem für die Quotientenmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim$. (4)

8*. Aufgabe: Sei R ein IB und $K = Q(R)$ der Quotientenkörper von R mit der Einbettung $\alpha : R \longrightarrow K$ (s. (2.12)). Beweise:

a) Zu jedem Körper L und jedem injektiven Ringhomomorphismus $f : R \longrightarrow L$ gibt es genau einen Körperhomomorphismus $f^\star : K \longrightarrow L$ mit der Eigenschaft $f^\star \circ \alpha = f$.

b) Ist K' ein Körper und $\alpha' : R \longrightarrow K'$ ein injektiver Ringhomomorphismus, der die entsprechende Eigenschaft aus a) wie α besitzt, so gibt es einen Körperisomorphismus $\beta : K \longrightarrow K'$ mit $\beta \circ \alpha = \alpha'$. (3*)

Frohe Ostern!