14. Übungsblatt

ALGEBRA (SS 2006)

Freiwillig, aber sehr ans Herz gelegt!

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

63. Aufgabe: Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Beweise:

a) Ist das regelmäßige n–Eck konstruierbar, so ist auch das regelmäßige $(2^k n)$–Eck für jedes $k \in \mathbb{N}$ kontruierbar .

b) Ist das regelmäßige $2n$–Eck konstruierbar, so ist auch das regelmäßige n–Eck kontruierbar .

c) Sind das regelmäßige m–Eck und das regelmäßige n–Eck konstruierbar und gilt $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$, so ist auch das regelmäßige (mn)–Eck konstruierbar.

d) Ist n von der Form $n = 2^k \cdot p_1 \cdot \ldots p_r$ $(k \geq 0, r \geq 0)$, wobei $p_1, \ldots, p_r$ paarweise verschiedene Fermat'sche Primzahlen sind, so ist das das regelmäßige n–Eck konstruierbar (hierbei sollen (16.6) und (16.7) nicht benutzt werden!) .

64. Aufgabe: G sei eine Gruppe. Beweise:

a) Ist U eine Untergruppe von G mit $G' \subseteq U$, so ist U Normalteiler in G (insbesondere ist G' Normalteiler in G) .

b) Ist N Normalteiler in G, so ist die Faktorgruppe G/N genau dann abelsch, wenn $G' \subseteq N$ gilt (insbesondere ist G/G' abelsch) .

65. Aufgabe: G sei eine auflösbare Gruppe. Beweise, daß dann auch jede Untergruppe und jede Faktorgruppe von G auflösbar sind.

66. Aufgabe: Sei G eine Gruppe mit dem neutralen Element e . Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) G ist auflösbar

b) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $G^{(n)} = \{e\}$.

67. Aufgabe: Beweise: S_n ist genau dann auflösbar, wenn $n \leq 4$ gilt .

Hinweis: In den Übungen wurde bewiesen: $S_n' = A_n$ für $n \geq 5$ und $A_n' = A_n$ für $n \geq 2$.

68. Aufgabe: G sei eine endliche Gruppe. Beweise, daß G genau dann auflösbar ist, wenn es in G eine Normalreihe mit zyklischen Faktoren gibt.

69. Aufgabe: a) Berechne das 12–te Kreisteilungspolynom Φ_{12} zum einen nach der Definition (16.7) und zum anderen mit Hilfe von Lemma (16.9) .

b) Beweise direkt, daß Φ_{12} irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.