13. Übungsblatt

ALGEBRA (SS 2006)

Abgabe: Do. 6.7.2006, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen! Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

58. Aufgabe: G sei eine endliche Gruppe. Beweise:

a) Für $a \in G$ sei die Abbildung $L_a : G \longrightarrow G$ definiert durch $L_a(x) = ax \quad (\forall x \in G)$. Dann wird durch die Vorschrift $a \longmapsto L_a \quad (a \in G)$ eine Abbildung $\chi : G \longrightarrow S_G$ definiert, die ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

b) Ist $|G| = n$, so ist G isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n. (3)

59. Aufgabe: Sei G eine endliche Gruppe. Beweise, daß es eine Galois–Erweiterung $L : K$ gibt mit $\mathbb{C} \supseteq L \supseteq K \supseteq \mathbb{Q}$ und $\mathrm{Gal}(L : K) \cong G$. (2)

60. Aufgabe: $f = T^3 + aT^2 + bT + c \in \mathbb{Q}[T]$ sei ein irreduzibles Polynom 3–ten Grades mit den Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$. Ferner sei $Z := \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Die Galois–Gruppe G von f über $\mathbb{Q}$ werde als Untergruppe von S_3 aufgefaßt. Definiere

$$d_f := (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3) \in \mathbb{C}.$$

Beweise: **a)** $G = A_3$ oder $G = S_3$

b) Für $\sigma \in G$ gilt: $\sigma(d_f) = d_f \iff \sigma$ ist eine gerade Permutation, und $\sigma(d_f) = -d_f \iff \sigma$ ist eine ungerade Permutation.

c) $\mathrm{Gal}(Z : \mathbb{Q}(d_f)) = G \cap A_3$ **d)** $G \subseteq A_3 \iff d_f^2 \in \mathbb{Q}^2 := \{ a^2 \mid a \in \mathbb{Q} \}$

e) Für $g := f(T - \frac{a}{3}) \in \mathbb{Q}[T]$ gilt:

1) Es gibt $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $g = T^3 + pT + q$

2) f und g haben denselben Zerfällungskörper über $\mathbb{Q}$

3) g ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$

4) $d_f^2 = -4p^3 - 27q^2$ (hier ist wirklich d_f gemeint!)

f) Bestimme mit den obigen Überlegungen die Galois–Gruppen von $h_1 = T^3 - 3T + 1$ und $h_2 = T^3 + 3T^2 - T - 1$ über $\mathbb{Q}$. (8)

61. Aufgabe: $L : K$ sei ein Körpererweiterung, und E sei ein Zwischenkörper von $L : K$. Beweise:

a) Sind $L : E$ und $E : K$ Radikalerweiterungen, so ist auch $L : K$ eine Radikalerweiterung.

b) Ist $L : K$ eine Radikalerweiterung, so ist auch $L : E$ eine Radikalerweiterung.

c) Untersuche, ob jede Galois–Erweiterung eine Radikalerweiterung ist. Gilt die Umkehrung? (3)

62*. Aufgabe: Konstruiere ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[T]$ mit $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f) \cong S_7$. Der Konstruktionsprozeß ist zu beschreiben und die Antwort ist zu begründen. (3*)