12. Übungsblatt

ALGEBRA (SS 2006)

Abgabe: Do. 29.6.2006, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

53. Aufgabe: Seien $f \in K[T]$ und $L := \mathrm{ZFK}_K(f)$. Ferner sei E ein Zwischenkörper von $L : K$. Beweise:

a) $L = \mathrm{ZFK}_E(f)$

b) Jeder K–Homomorphismus $\sigma : E \longrightarrow L$ läßt sich zu einem K–Automorphismus von L fortsetzen, d.h. es gibt einen K–Automorphismus $\rho : L \longrightarrow L$ mit $\rho|E = \sigma$. (4)

54. Aufgabe: Sei K ein vollkommener Körper und $L : K$ eine endliche Körpererweiterung. Beweise, daß $L : K$ einfach ist. (Erst nach der Vorlesung am Montag machbar!) (2)

55. Aufgabe: a) Sei $f \in \mathbb{Q}[T]$ ein irreduzibles Polynom mit $Z := \mathrm{ZFK}_{\mathbb{Q}}(f) \subseteq \mathbb{C}$. Ferner gelte $\mathrm{Gal}(Z : \mathbb{Q}) \cong A_3$. Beweise, daß f drei einfache reelle Nullstellen besitzt.

b) Wie läßt sich a) verallgemeinern? Beweis? (4)

56. Aufgabe: Seien $f = T^3 - 3T + 1 \in \mathbb{Q}[T]$ und $Z := \mathrm{ZFK}_{\mathbb{Q}}(f) \subseteq \mathbb{C}$.

a) Ist $Z : \mathbb{Q}$ eine Galois–Erweiterung ?

b) Beweise, daß $\alpha_1 := 2\cos(\frac{2\pi}{9})$ eine Nullstelle von f ist.

c) Berechne die beiden übrigen Nullstellen α_2, α_3 von f und stelle sie in möglichst einfacher Form dar.

d) Bestimme den Grad $[Z : \mathbb{Q}]$ und die Galois–Gruppe $G := \mathrm{Gal}(Z : \mathbb{Q})$

e) Bestimme alle Zwischenkörper von $Z : \mathbb{Q}$. Muß man hierfür überhaupt den Hauptsatz der Galois–Theorie bemühen? (6)

57*. Aufgabe: a) Sei K ein Körper und $f \in K[T]$ ein normiertes Polynom. Beweise, daß f nur endlich viele normierte Teiler besitzt.

b) Sei $L : K$ eine endliche einfache Körpererweiterung , und $\alpha \in L$ sei ein primitives Element von $L : K$. Beweise:

1) Ist E ein beliebiger Zwischenkörper von $L : K$, so gilt $E = K(M)$, wobei M die Menge der Koeffizienten des Minimalpolynoms von α über E ist.

2) $L : K$ besitzt nur endlich viele Zwischenkörper. (3*)