11. Übungsblatt

ALGEBRA (SS 2006)

Abgabe: Do. 22.6.2006, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/~ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

48. Aufgabe: Seien $\alpha := e^{\frac{2\pi i}{7}} \in \mathbb{C}$, $L := \mathbb{Q}(\alpha)$ und $G := \mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$.

a) Beweise, daß $L : \mathbb{Q}$ eine Galois–Erweiterung ist.

b) Bestimme die Ordnung eines jeden Elementes aus G. Was für eine Gruppe ist G?

c) Bestimme alle Untergruppen von G.

d) Bestimme alle Zwischenkörper von $L : \mathbb{Q}$.

e) Für welche Zwischenkörper E von $L : \mathbb{Q}$ ist $E : \mathbb{Q}$ wieder eine Galois–Erweiterung? (7)

49. Aufgabe: Sei $L : K$ eine Galois–Erweiterung , $G := \mathrm{Gal}(L : K)$ und $\alpha \in L$. Ferner sei $M := \{\sigma(\alpha) | \sigma \in G\} =: \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\} \subseteq L$. Beweise:

a) $\forall \tau \in G : \tau(M) = M$.

b) $f := (T - \alpha_1) \cdot (T - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (T - \alpha_m) \in L[T]$ ist das Minimalpolynom von α über K .

Hinweis: Es ist insbesondere $f \in K[T]$ zu zeigen. Benutze dazu Aufgabe 43. (4)

50. Aufgabe: $L : K$ sei eine Galois–Erweiterung vom Grade n , deren Galois–Gruppe zyklisch sei. Beweise: Zu jedem positivem Teiler t von n gibt es genau einen Zwischenkörper E von $L : K$ mit $[E : K] = t$, und es gibt keine weiteren Zwischenkörper von $L : K$. (3)

51. Aufgabe: $L : K$ sei eine Galois–Erweiterung mit der Galois–Gruppe G .

a) Untersuche im Falle $G \cong A_4$, ob $L : K$ einen Zwischenkörper E mit $[E : K] = 2$ besitzt .

b) Untersuche im Falle $G \cong S_4$, ob $L : K$ eine Zwischenkörper F mit $[F : K] = 3$ besitzt, so daß $F : K$ eine Galois–Erweiterung ist. (2)

Hinweis: Die Untergruppenverbände von A_4 und S_4 findet man auf der Internetseite meiner Vorlesung “Grundzüge der Algebra” (WS 2005/06) . Diese dürfen hier ohne Beweis benutzt werden.

52*. Aufgabe: Die Körpererweiterung $L : K$ besitze nur endlich viele Zwischenkörper. Beweise:

a) $L : K$ ist algebraisch **b)** $L : K$ ist endlich . (3*)