10. Übungsblatt

ALGEBRA (SS 2006)

Abgabe: Fr. 16.6.2006, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

42. Aufgabe: $L : K$ sei eine Körpererweiterung, $\alpha, \beta \in L$ seien algebraisch über K und es gelte $L = K(\alpha, \beta)$. Ferner seien $\rho, \sigma \in \mathrm{Gal}(L : K)$. Beweise:

$$\rho = \sigma \quad \Longleftrightarrow \quad (\,\rho(\alpha) = \sigma(\alpha) \;\text{ und }\; \rho(\beta) = \sigma(\beta)\,)\,.$$

(3)

43. Aufgabe: $L : K$ sei eine Körpererweiterung, $G := \mathrm{Gal}(L : K), U \leq G$ eine Untergruppe von G und $f \in L[T]$. Beweise:

$$f \in L^U[T] \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \sigma \in U \;:\; \overline{\sigma}(f) = f\,.$$

(2)

44. Aufgabe: $L : K$ sei eine endliche Körpererweiterung, $U \leq \mathrm{Gal}(L : K)$ eine Untergruppe und $\mathrm{spur}_U : L \longrightarrow L$ die zu U gehörige Spurabbildung (s. (11.3)). Beweise:

a) spur_U ist eine L^U–lineare Abbildung **b)** $\mathrm{Bild}(\mathrm{spur}_U) = L^U$

c) Ist $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine Basis des K–Vektorraumes L, so gilt

$$L^U \;=\; K(\,\mathrm{spur}_U(\alpha_1), \ldots, \mathrm{spur}_U(\alpha_n)\,)\,.$$

(5)

45. Aufgabe: Sei $L := \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ und $G := \mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$. Nach Aufgabe 38b) gilt $|G| = 4 = [L : \mathbb{Q}]$, und es gibt einen $\mathbb{Q}$–Automorphismus σ von L mit $\sigma(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$ und $\sigma(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$. Sei $U := \langle \sigma \rangle$ die von σ erzeugte zyklische Untergruppe von G. Bestimme den Fixkörper L^U von U mit Hilfe von Aufgabe 44c). (3)

46. Aufgabe: $L : K$ sei eine Körpererweiterung vom Grade 2, und es gelte $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Beweise, daß $L : K$ eine Galois–Erweiterung ist. Wo geht die Voraussetzung $\mathrm{char}(K) \neq 2$ ein? (3)

47*. Aufgabe: Untersuche, ob eine Körpererweiterung vom Grade 2 auch im Falle der Charakteristik 2 eine Galois–Erweiterung sein muß. (3*)