1. Übungsblatt

ALGEBRA (SS 2006)

Abgabe: Do. 13.4.2006, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.
Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

1. Aufgabe: In der Ebene sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit Ursprung $O = (0,0)$ vorgegeben. Es bezeichne A den Punkt $(1,0)$, B den Punkt $(-1,0)$ und C den Punkt $(0,1)$.

a) Führe die folgende Konstruktion mit Zirkel und Lineal aus:

1) Schlage um O den Kreis mit dem Radius 1 (Einheitskreis)
2) Konstruiere den Mittelpunkt D der Strecke BO
3) Schlage um D den Kreis mit dem Abstand der Punkte C und D als Radius. Dieser Kreis schneide die positive x–Achse im Punkte E.
4) Konstruiere die Mittelsenkrechte der Strecke OE. Diese schneide den Einheitskreis im ersten Quadranten im Punkte P und die Strecke OE im Punkte F.

b) Beweise, daß der Winkel φ, der von den beiden Halbgeraden OA und OP eingeschlossen wird, gleich $\frac{2\pi}{5}$ ist. Es darf die Formel $\sin(\frac{\pi}{10}) = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ ohne Beweis benutzt werden.

c) Welche Figur läßt sich mit der oben angegebenen Konstruktion mit Zirkel und Lineal zeichnen? (4)

2. Aufgabe: a) Beweise Satz (1.9) der Vorlesung.

b) Sei $M = \{1,2,3,4\}$. Wieviele Relationen gibt es auf der Menge M?
Wieviele Äquivalenzrelationen gibt es auf der Menge M? (Alle Antworten natürlich mit Begründung!)

c) Sei ρ eine Relation auf einer nichtleeren Menge N, die sowohl lineare Ordnungs– als auch Äquivalenzrelation ist. Welche Relation ist dann ρ? (6)

3. Aufgabe: Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe, und sei ρ eine beliebige Kongruenzrelation auf $(G,\cdot)$. Beweise:

a) $N := [1]_\rho$ ist ein Normalteiler in $(G,\cdot)$.

b) Es gilt $\rho = \lambda_N$ (s. (1.13a)). (4)

4*. Aufgabe: (Sonderaufgabe, für die es Sonderpunkte gibt)
Beweise die Formel für $\sin(\frac{\pi}{10})$ aus Aufgabe 1b).
Hinweis: Man kann mehr geometrisch oder mehr algebraisch vorgehen:

Geometrisch: Bestimme $\sin(\frac{\pi}{10})$ in einem gleichschenkligen Dreieck, in dem die beiden gleichlangen Schenkel der Länge 1 den Winkel $\frac{\pi}{5}$ einschließen.

Algebraisch: Seien $\varepsilon := e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $\eta_1 := \varepsilon + \varepsilon^4$ und $\eta_2 := \varepsilon^2 + \varepsilon^3$. Zeige, daß η_1 und η_2 Nullstellen eines Polynoms zweiten Grades über $\mathbb{Q}$ sind. (3*)