Zu §9. Der Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen

Eine endliche abelsche Gruppe G heißt **primär**, wenn die Ordnung von G eine Primzahlpotenz ist. Im Falle $|G| = p^k$ mit $p \in \mathbb{P}$ nennen wir G dann auch p–primär. Wir haben bewiesen:

(9.6) SATZ: Eine endliche **zyklische** Gruppe ist isomorph zu einem direkten Produkt von primären zyklischen Gruppen.

(9.9) SATZ: Primärzerlegung

Jede endliche abelsche Gruppe ist isomorph zu einem direkten Produkt von primären Gruppen.

Bew: (s. Vorlesung und Homepage)

(9.10) SATZ: G sei eine primäre Gruppe. Dann gilt:

a) G ist isomorph zu einem direkten Produkt von p–primären zyklischen Gruppen.

b) Ist $G \cong \mathbb{Z}_{p^{k_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{k_2}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p^{k_r}}$ mit $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_r \geq 1$, so ist das r Tupel $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ durch G eindeutig bestimmt.

Bew: s. Serge Lang, "Algebra" (1974), Thm 6, S. 46.

(9.11) LEMMA: G_i, H_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ seien Gruppen. Es gelte $G_i \cong H_i$ $(\forall\, i = 1, 2, \ldots, r)$. Dann folgt

$$G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_r \cong H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_r$$

(9.12) HAUPTSATZ über endliche abelsche Gruppen

G sei eine endliche abelsche Gruppe. Dann gilt:

a) G ist isomorph zu einem direkten Produkt von primären zyklischen Gruppen.

b) Aus $H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_r \cong K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_s$ mit primären zyklischen Gruppen H_i und K_j der Ordnung ≥ 2 folgt $r = s$ und $H_i \cong K_i$ $(\forall\, i = 1, 2, \ldots, r)$ nach geeigneter Umnumerierung.

(9.13) SATZ: Die Anzahl $A(n)$ der Isomorphieklassen abelscher Gruppen der Ordnung $n \geq 2$ ist

$$A(n) = z(k_1) \cdot \ldots \cdot z(k_r) ,$$

wenn n die kanonische PFZ $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$ besitzt. Dabei bezeichnet $z(k)$ für $k \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Partitionen von k ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

(9.14) BEM: Eine erzeugende Funktion für $z(k)$ ist $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^n}$, d.h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} z(k)\, x^k = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^n} .$$