(8.10) BEISPIEL: Die Faktorgruppe $\mathbb{C}^\star/S$

(S. Aufg. 18) Es ist $(\mathbb{C}^\star, \cdot)$ eine abelsche Gruppe und $S := \{\, z \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \,\}$ ein Normalteiler in $(\mathbb{C}^\star, \cdot)$. Anschaulich stellt S den Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene dar.

Für $a, b \in \mathbb{C}^\star$ gilt: $b \in aS \iff a^{-1}b \in S \iff |a^{-1}b| = 1 \iff |a| = |b|$, d.h. die Nebenklasse $aS = [a]_S$ ist anschaulich der Kreis um 0 mit Radius $|a|$. Insbesondere ist $S = 1S = [1]_S$. Damit ist

$$\mathbb{C}^\star/S = \{\, [a]_S \mid a \in \mathbb{C}^\star \,\} = \{ aS \mid a \in \mathbb{C}^\star \}$$

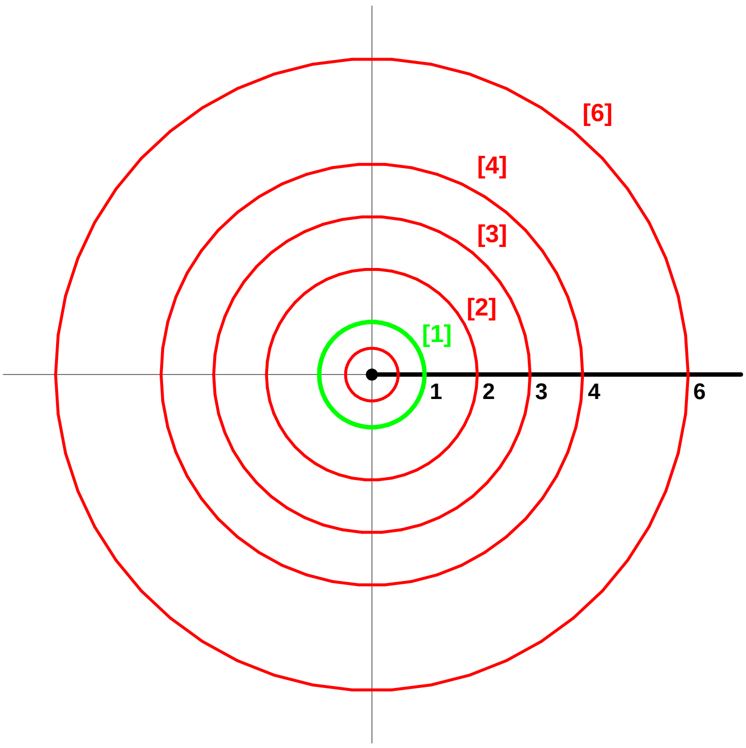
anschaulich die Menge aller konzentrischen Kreise um den Nullpunkt mit einem Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Jeder solche Kreis schneidet die positive x–Achse in genau einem Punkt (dieses ist der Radius des Kreises), so daß $\mathbb{R}_{>0}$ ein vollständiges Vertretersystem für die Nebenklassen nach S ist:

$$\mathbb{C}^\star/S = \{\, [r]_S \mid r \in \mathbb{R}_{>0} \,\}$$

Die “Multiplikation” zweier Nebenklassen erfolgt nach der Vorschrift

$$[a]_S \odot [b]_S \;=\; [a \cdot b]_S$$

Hierbei ist $[a \cdot b]_S$ der Kreis um 0 mit Radius $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, d.h. zwei Kreise werden miteinander “multipliziert”, indem man ihre Radien multipliziert. So ist z.B. $[2]_S \odot [3]_S = [2 \cdot 3]_S = [6]_S$.



(8.11) SATZ: Sei $\mathbb{Z}_n = \{\, [a]_n \mid a \in \mathbb{Z} \,\} = \{[0]_n, [1]_n, [2]_n, \ldots, [n-1]_n\,\}$ die Menge der Restklassen modulo $n \in \mathbb{N}$ (s. Aufg. 17). Dann ist $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung n. Dabei ist die Verknüpfung $\oplus$ definiert durch

$$[a]_n \oplus [b]_n := [a+b]_n \,.$$

In $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ ist$[0]_n$ das neutrale Element, und $[-a]_n$ ist Inverses von $[a]_n$.

(8.12) SATZ: Homomorphiesatz für Gruppen

$f : (G, \star) \longrightarrow (H, \diamondsuit)$ sei ein Gruppenhomomorphismus und $N \leq (G, \star)$ ein Normalteiler mit $N \subseteq \mathrm{Kern}(f)$. Dann gilt:

a) Es gibt genau einen Gruppenhomomorphismus $f^\star : (G/N, \otimes) \longrightarrow (H, \diamondsuit)$ mit der Eigenschaft $f^\star \circ \nu_N = f$.

$f^\star$ heißt der durch f **induzierte** Gruppenhomomorphismus.

$f^\star$ ist definiert durch $f^\star([a]_N) := f(a)$ für alle $a \in G$.

$$\begin{tikzcd}
(G, \star) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\nu_N"'] & (H, \diamondsuit) \\
(G/N, \otimes) \arrow[ur, "f^\star"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{f^\star \circ \nu_N = f}$$

b) $f^\star$ surjektiv $\iff$ f surjektiv

c) $f^\star$ injektiv $\iff$ $N = \mathrm{Kern}(f)$

(8.13) FOLG: $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \diamondsuit)$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:

a) $(G/\mathrm{Kern}(f), \otimes) \;\cong\; (\mathrm{Bild}(f), \diamondsuit)$.

b) Ist f surjektiv, so folgt $(G/\mathrm{Kern}(f), \otimes) \;\cong\; (H, \diamondsuit)$.

(8.14) BEISPIELE: **a)** Der surjektive Gruppenhomomorphismus $\det : (\mathrm{GL}_n(K), \cdot) \longrightarrow (K^\star, \cdot)$, $A \longmapsto \det(A)$, induziert einen Gruppenisomorphismus $\det^\star : \mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{SL}_n(K) \longrightarrow (K^\star, \cdot)$. Dieser ist definiert durch $[A] \longmapsto \det(A)$.

b) Sei $n \geq 2$. Der surjektive Gruppenhomomorphismus $\mathrm{sign}{:}(S_n, \circ) \longrightarrow (\{\,1, -1\,\}, \cdot)$, $\pi \longmapsto \mathrm{sign}\,(\pi)$, induziert einen Gruppenisomorphismus $\mathrm{sign}^\star : S_n/A_n \longrightarrow \{\,1, -1\,\}$. Dieser ist definiert durch $[\pi] \longmapsto \mathrm{sign}\,(\pi)$.