§8. Faktorgruppen und der Homomorphiesatz

Sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $U \leq (G, \star)$ eine Untergruppe. Ferner sei

$$\mathcal{L}_G(U) \;=\; \{\, a \star U \mid a \in G \,\} \;=:\; \mathcal{L}$$

die Menge der Linksnebenklassen nach U.

Frage: Läßt sich $\mathcal{L}$ wieder zu einer Gruppe machen?

Naheliegender Versuch: Komplexverknüpfung

(8.1) BEM: Genau dann wird durch die Vorschrift

$$(a \star U) \circledast (b \star U) := \;(a \star b) \star U$$

eine Verknüpfung auf der Menge $\mathcal{L}_G(U)$ aller Linksnebenklassen nach U definiert, wenn gilt

$$\forall\, a \in G: \quad a \star U \;=\; U \star a$$

(8.2) LEMMA: Für $U \leq (G, \star)$ sind äquivalent:

a) $\forall\, a \in G: \quad a \star U \;=\; U \star a$

b) $\forall\, a \in G: \quad a \star U \;\subseteq\; U \star a$

c) $\forall\, a \in G\, \forall\, x \in U: \quad a \star x \star \overline{a} \in U$.

(8.3) DEF: $(G, \star)$ sei eine Gruppe. Eine Teilmenge $N \subseteq G$ heißt **Normalteiler** von $(G, \star)$, in Zeichen $N \trianglelefteq (G, \star)$, wenn gilt:

NT$_1$) $N \leq (G, \star)$

NT$_2$) $\forall\, a \in G\, \forall\, x \in N: \quad a \star x \star \overline{a} \in N$.

Die Linksnebenklasse von $a \in G$ nach N wird mit $[a]_N$ bezeichnet und die Menge aller Linksnebenklassen nach N mit G/N (lies: "G nach N").

(8.4) BEM: **a)** $N \trianglelefteq (G, \star) \quad \Longrightarrow \quad a \star N \;=\; [a]_N \;=\; N \star a$

b) $N \trianglelefteq (G, \star) \quad \Longrightarrow \quad G/N \;=\; \{\, [a]_N \mid a \in G \,\} \;=\; \mathcal{L}_G(N) \;=\; \mathcal{R}_G(N)$.

c) $U \leq (G, \star)$ und $(G : U) = 2 \quad \Longrightarrow \quad U \trianglelefteq G$.

(8.5) LEMMA: Ist $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \triangle)$ ein Gruppenhomomorphismus, so gilt

$$\mathrm{Kern}(f) \trianglelefteq (G, \star).$$

(8.6) BEISPIELE: **a)** $\{e_G\} \trianglelefteq (G,\star)$, $G \trianglelefteq (G,\star)$

b) In einer abelschen Gruppe ist jede Untergruppe auch Normalteiler.

c) Eine Untergruppe der Ordnung 2 von $(S_3,\circ)$ ist kein Normalteiler.

d) In der nichtabelschen Gruppe $(Q,\cdot)$ aus Aufgabe 32, der sog. **Quaternionengruppe**, ist jede Untergruppe Normalteiler.

e) $A_n \trianglelefteq (S_n,\circ)$ (Begründung: $(S_n : A_n) = 2$ für $n \geq 2$ oder $A_n = \mathrm{Kern}(sign)$).

f) $\mathrm{SL}_n(K) \trianglelefteq (\mathrm{GL}_n(K),\cdot)$ (Begründung: $\mathrm{SL}_n(K) = \mathrm{Kern}(\det)$).

(8.7) SATZ: $(G,\star)$ sei eine Gruppe und N ein Normalteiler von $(G,\star)$. Dann gilt:

a) Die Menge G/N der Nebenklassen nach N ist eine Gruppe bzgl. der Verknüpfung

$$[a]_N \circledast [b]_N := [a \star b]_N \quad (\forall\, a, b \in G)$$

Dabei ist $[e_G]_N$ das neutrale Element, und $[\overline{a}]_N$ ist das Inverse von $[a]_N$.
$(G/N, \circledast)$ heißt **Faktorgruppe von** G **nach** N.

b) Die Abbildung

$$\nu_N : G \longrightarrow G/N \quad , \quad a \longmapsto [a]_N \quad (a \in G)$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\nu_N : (G,\star) \longrightarrow (G/N, \circledast)$ mit

$$\mathrm{Kern}(\nu_N) = N\,.$$

ν_N heißt **natürlicher Gruppenhomomorphismus**.

c) Ist $(G,\star)$ abelsch, so ist auch $(G/N, \circledast)$ abelsch.

(8.8) BEM: Ist $(G,\star)$ eine endliche Gruppe und ist $N \trianglelefteq (G,\star)$ ein Normalteiler, so gilt

$$|\,G/N\,| \;=\; (G:N) \;=\; \frac{|G|}{|N|}\,.$$

(8.9) BEM: $(G,\star)$ sei eine Gruppe und $N \subseteq G$ eine Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) N ist Normalteiler von $(G,\star)$

b) N ist Kern eines geeigneten Gruppenhomomorphismus.