§7. Gruppenhomomorphismen

(7.1) DEF: $(G,\star)$ und $(H,\triangle)$ seien Gruppen.

a) Eine Abbildung $f : G \longrightarrow H$ heißt ein **Gruppenhomomorphismus von** $\boldsymbol{(G,\star)}$ **nach** $\boldsymbol{(H,\triangle)}$, wenn gilt

$$\boldsymbol{\forall\, a, a' \in G \;:\; f(a \star a') \;=\; f(a) \triangle f(a')\ .}$$

Ist f außerdem bijektiv, so heißt f ein **Gruppenisomorphismus von** $\boldsymbol{(G,\star)}$ **auf** $\boldsymbol{(H,\triangle)}$.

b) $(G,\star)$ heißt **isomorph** zu $(H,\triangle)$, in Zeichen $\boldsymbol{(G,\star) \cong (H,\triangle)}$, wenn es einen Gruppenisomorphismus von $(G,\star)$ auf $(H,\triangle)$ gibt.

(7.2) BEISPIELE: a) $f : (G,\star) \longrightarrow (H,\triangle)$, definiert durch $a \longmapsto e_H \quad (\forall\, a \in G)$, ist ein Gruppenhomomorphismus, der sog. **triviale Gruppenhomomorphismus**.

b) Die identische Abbildung $\mathrm{id}_G : (G,\star) \longrightarrow (G,\star)$ ist ein Gruppenisomorphismus.

c) $\det : (\mathrm{GL}_n(K),\cdot) \longrightarrow (K^\star,\cdot)$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Hierbei ist K ein beliebiger Körper und $K^\star := K \setminus \{0_K\}$.
Grund: Determinantenproduktsatz $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

d) $\mathrm{sign}:(S_n,\circ) \longrightarrow (\{1,-1\},\cdot)$, $\pi \longmapsto \mathrm{sign}(\pi)$, ist für $n \geq 2$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Grund: $\mathrm{sign}\,(\pi \circ \rho) = \mathrm{sign}\,(\pi) \cdot \mathrm{sign}\,(\rho)$.

e) $b : (\mathbb{C}^\star,\cdot) \longmapsto (\mathbb{R}_{>0},\cdot)$, $z \longmapsto |z|$, ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.
Grund: $|\, z \cdot w \,| \;=\; |\, z \,| \cdot |\, w \,|$.

f) $\exp : (\mathbb{R},+) \longrightarrow (\mathbb{R}_{>0},\cdot)$, $x \longmapsto e^x$, ist ein Gruppenisomorphismus mit Umkehrabbildung $\exp^{-1} = \ln : (\mathbb{R}_{>0},\cdot) \longrightarrow (\mathbb{R},+)$. Grund: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.

h) Sei $(G,\star)$ eine Gruppe und $a \in G$ fest. Dann ist die Abbildung
$f : (\mathbb{Z},+) \longrightarrow (G,\star)$, $n \longmapsto a^{(n)}$, ein Gruppenhomomorphismus. Grund: $a^{(m+n)} \;=\; a^{(m)} \star a^{(n)}$.

i) Ist $f : V \longrightarrow W$ eine K–lineare Abbildung zwischen zwei K–Vektorräumen (K ein beliebiger Körper), so ist $f : (V,+) \longrightarrow (W,+)$ ein Gruppenhomomorphismus.

(7.3) LEMMA: $f : (G,\star) \longrightarrow (H,\triangle)$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:

a) $f(e_G) = e_H$

b) $f(\overline{a}) = \overline{f(a)} \quad (\forall\, a \in G)$.

(7.4) LEMMA: a) Sind $f : (G,\star) \longrightarrow (H,\triangle)$ und $g : (H,\triangle) \longrightarrow (K,\diamondsuit)$ Gruppenhomomorphismen (bzw. Gruppenisomorphismen), so ist auch $g \circ f : (G,\star) \longrightarrow (K,\diamondsuit)$ ein Gruppenhomomorphismus (bzw. Gruppenisomorphismus).

b) Ist $f : (G,\star) \longrightarrow (H,\triangle)$ ein Gruppenisomorphismus, so ist auch $f^{-1} : (H,\triangle) \longrightarrow (G,\star)$ ein Gruppenisomorphismus.

Eigenschaften, die unter Gruppenisomorphismen erhalten bleiben:

(7.5) SATZ: $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \triangle)$ sei ein Gruppenisomorphismus. Dann gilt:

a) $(G, \star)$ abelsch $\iff$ $(H, \triangle)$ abelsch

b) $|G| = |H|$

c) $\mathrm{ord}\,(a) = \mathrm{ord}\,(f(a))$ $(\forall\, a \in G)$

d) $(G, \star)$ zyklisch $\iff$ $(H, \triangle)$ zyklisch.

(7.6) FOLG: **a)** Es gilt $(V, \star) \not\cong (EW_4, \cdot)$, da die Kleinsche Vierergruppe $(V, \star)$ nicht zyklisch ist.

b) Es gilt $(S_3, \circ) \not\cong (EW_6, \cdot)$, da $(S_3, \circ)$ nicht abelsch ist.

(7.7) SATZ: Sei $(G, \star)$ eine Gruppe. Dann gilt:

a) im Falle $|G| = \infty$: $(G, \star)$ zyklisch $\iff$ $(G, \star) \cong (\mathbb{Z}, +)$

b) Im Falle $|G| =: n < \infty$: $(G, \star)$ zyklisch $\iff$ $(G, \star) \cong (EW_n, \cdot)$.
Hierbei bezeichnet $(EW_n, \cdot)$ die Gruppe der n–ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$.

(7.8) SATZ: **a)** Eine Gruppe der Ordnung 4 ist entweder isomorph zu $(EW_4, \cdot)$ oder zur Kleinschen Vierergruppe.

b) Eine Gruppe der Ordnung 6 ist entweder isomorph zu $(EW_6, \cdot)$ oder zur symmetrischen Gruppe $(S_3, \circ)$.

(7.9) SATZ: $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \triangle)$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:

a) $U \leq (G, \star) \implies f(U) \leq (H, \triangle)$

b) $U_1, U_2 \leq (G, \star)\ :\ U_1 \subseteq U_2 \implies f(U_1) \subseteq f(U_2)$

c) $V \leq (H, \triangle) \implies f^{-1}(V) \leq (G, \star)$

d) $V_1, V_2 \leq (H, \triangle)\ :\ V_1 \subseteq V_2 \implies f^{-1}(V_1) \subseteq f^{-1}(V_2)$

(7.10) FOLG: Isomorphe Gruppen haben isomorphe Untergruppenverbände.

(7.11) DEF: $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \triangle)$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Dann definiert man:

a) $\mathbf{Kern}(\boldsymbol{f}) := \{\, \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{G}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{e_H} \,\} \subseteq \boldsymbol{G}$

b) $\mathbf{Bild}(\boldsymbol{f}) := \{\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \mid \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{G} \,\} \subseteq \boldsymbol{H}$.

(7.12) SATZ: $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \triangle)$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:

a) $\mathrm{Kern}(f) \leq (G, \star)$

b) f injektiv $\iff$ $\mathrm{Kern}(f) = \{\, e_G \,\}$

c) $\mathrm{Bild}(f) \leq (H, \triangle)$

d) f surjektiv $\iff$ $\mathrm{Bild}(f) = H$.

(7.13) BEISPIELE: Wir geben für die Gruppenhomomorphismen aus (7.2) den jeweiligen Kern und das jeweilige Bild an. Die Numerierung entspricht der von (7.2).

a) $\mathrm{Kern}(f) = G$, $\mathrm{Bild}(f) = \{\, e_H \,\}$

b) $\mathrm{Kern}(\mathrm{id}_G) = \{\, e_G \,\}$, $\mathrm{Bild}(\mathrm{id}_G) = G$

c) $\mathrm{Kern}(\det) = \{ A \mid A \in \mathrm{GL}_n(K), \det(A) = 1 \} = \mathrm{SL}_n(K)$, $\mathrm{Bild}(\det) = K^\star$

d) $\mathrm{Kern}(\mathrm{sign}) = \{\, \pi \mid \pi \in S_n, \mathrm{sign}(\pi) = 1 \,\} = A_n$, $\mathrm{Bild}(\mathrm{sign}) = \{\, 1, -1 \,\}$

e) $\mathrm{Kern}(b) = \{\, z \mid z \in \mathbb{C}^\star, |b| = 1 \,\}$, $\mathrm{Bild}(b) = \mathbb{R}_{>0}$

f) $\mathrm{Kern}(\exp) = \{\, 0 \,\}$, $\mathrm{Bild}(\exp) = \mathbb{R}_{>0}$

h) $\mathrm{ord}\,(a) = m < \infty :$ $\mathrm{Kern}(f) = \mathbb{Z}\, m$, $\mathrm{ord}\,(a) = \infty :$ $\mathrm{Kern}(f) = \{\, 0 \,\}$

In beiden Fällen gilt $\mathrm{Bild}(f) = \langle\, a \,\rangle$.