§7. Gruppenhomomorphismen

(7.1) DEF: $(G, \star)$ und $(H, \triangle)$ seien Gruppen.

a) Eine Abbildung $f : G \longrightarrow H$ heißt ein **Gruppenhomomorphismus von $(G, \star)$ nach $(H, \triangle)$**, wenn gilt

$$\forall\, a, a' \in G \;:\; f(a \star a') \;=\; f(a) \triangle f(a')\ .$$

Ist f außerdem bijektiv, so heißt f ein **Gruppenisomorphismus von $(G, \star)$ auf $(H, \triangle)$**.

b) $(G, \star)$ heißt **isomorph** zu $(H, \triangle)$, in Zeichen $(G, \star) \cong (H, \triangle)$, wenn es einen Gruppenisomorphismus von $(G, \star)$ auf $(H, \triangle)$ gibt.

(7.2) BEISPIELE: a) $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \triangle)$, definiert durch $a \longmapsto e_H$ $(\forall\, a \in G)$, ist ein Gruppenhomomorphismus, der sog. **triviale Gruppenhomomorphismus**.

b) Die identische Abbildung $\mathrm{id}_G : (G, \star) \longrightarrow (G, \star)$ ist ein Gruppenisomorphismus.

c) $\det : (\mathrm{GL}_n(K), \cdot) \longrightarrow (K^\star, \cdot)$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Hierbei ist K ein beliebiger Körper und $K^\star := K \setminus \{0_K\}$.
Grund: Determinantenproduktsatz $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

d) $\mathrm{sign}:(S_n, \circ) \longrightarrow (\{1, -1\}, \cdot)$, $\pi \longmapsto \mathrm{sign}(\pi)$, ist für $n \geq 2$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Grund: $\mathrm{sign}\,(\pi \circ \rho) = \mathrm{sign}\,(\pi) \cdot \mathrm{sign}\,(\rho)$.

e) $b : (\mathbb{C}^\star, \cdot) \longmapsto (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $z \longmapsto |z|$, ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.
Grund: $|\, z \cdot w \,| \;=\; |\, z \,| \cdot |\, w \,|$.

f) $\exp : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $x \longmapsto e^x$, ist ein Gruppenisomorphismus mit Umkehrabbildung $\exp^{-1} = \ln : (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$. Grund: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.

h) Sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $a \in G$ fest. Dann ist die Abbildung
$f : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (G, \star)$, $n \longmapsto a^{(n)}$, ein Gruppenhomomorphismus. Grund: $a^{(m+n)} \;=\; a^{(m)} \star a^{(n)}$.

i) Ist $f : V \longrightarrow W$ eine K–lineare Abbildung zwischen zwei K–Vektorräumen (K ein beliebiger Körper), so ist $f : (V, +) \longrightarrow (W, +)$ ein Gruppenhomomorphismus.

(7.3) LEMMA: $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \triangle)$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:

a) $f(e_G) = e_H$

b) $f(\overline{a}) = \overline{f(a)}$ $(\forall\, a \in G)$.

(7.4) LEMMA: a) Sind $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \triangle)$ und $g : (H, \triangle) \longrightarrow (K, \diamondsuit)$ Gruppenhomomorphismen (bzw. Gruppenisomorphismen), so ist auch $g \circ f : (G, \star) \longrightarrow (K, \diamondsuit)$ ein Gruppenhomomorphismus (bzw. Gruppenisomorphismus).

b) Ist $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \triangle)$ ein Gruppenisomorphismus, so ist auch $f^{-1} : (H, \triangle) \longrightarrow (G, \star)$ ein Gruppenisomorphismus.

Eigenschaften, die unter Gruppenisomorphismen erhalten bleiben:

(7.5) SATZ: $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \triangle)$ sei ein Gruppenisomorphismus. Dann gilt:

a) $(G, \star)$ abelsch $\iff$ $(H, \triangle)$ abelsch

b) $|G| = |H|$

c) $\operatorname{ord}(a) = \operatorname{ord}(f(a))$ $(\forall\, a \in G)$

d) $(G, \star)$ zyklisch $\iff$ $(H, \triangle)$ zyklisch.

(7.6) FOLG: **a)** Es gilt $(V, \star) \not\cong (EW_4, \cdot)$, da die Kleinsche Vierergruppe $(V, \star)$ nicht zyklisch ist.

b) Es gilt $(S_3, \circ) \not\cong (EW_6, \cdot)$, da $(S_3, \circ)$ nicht abelsch ist.

(7.7) SATZ: Sei $(G, \star)$ eine Gruppe. Dann gilt:

a) im Falle $|G| = \infty$: $(G, \star)$ zyklisch $\iff$ $(G, \star) \cong (\mathbb{Z}, +)$

b) Im Falle $|G| =: n < \infty$: $(G, \star)$ zyklisch $\iff$ $(G, \star) \cong (EW_n, \cdot)$.

Hierbei bezeichnet $(EW_n, \cdot)$ die Gruppe der n–ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$.

(7.8) SATZ: **a)** Eine Gruppe der Ordnung 4 ist entweder isomorph zu $(EW_4, \cdot)$ oder zur Kleinschen Vierergruppe.

b) Eine Gruppe der Ordnung 6 ist entweder isomorph zu $(EW_6, \cdot)$ oder zur symmetrischen Gruppe $(S_3, \circ)$.

(7.9) SATZ: $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \triangle)$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:

a) $U \leq (G, \star) \implies f(U) \leq (H, \triangle)$

b) $U_1, U_2 \leq (G, \star) \;:\; U_1 \subseteq U_2 \implies f(U_1) \subseteq f(U_2)$

c) $V \leq (H, \triangle) \implies f^{-1}(V) \leq (G, \star)$

d) $V_1, V_2 \leq (H, \triangle) \;:\; V_1 \subseteq V_2 \implies f^{-1}(V_1) \subseteq f^{-1}(V_2)$

(7.10) FOLG: Isomorphe Gruppen haben isomorphe Untergruppenverbände.

(7.11) DEF: $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \triangle)$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Dann definiert man:

a) $\boldsymbol{\mathrm{Kern}(f) := \{ a \mid a \in G, f(a) = e_H \} \subseteq G}$

b) $\boldsymbol{\mathrm{Bild}(f) := \{ f(a) \mid a \in G \} \subseteq H}$.

(7.12) SATZ: $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \triangle)$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:

a) $\mathrm{Kern}(f) \leq (G, \star)$

b) f injektiv $\iff$ $\mathrm{Kern}(f) = \{ e_G \}$

c) $\mathrm{Bild}(f) \leq (H, \triangle)$

d) f surjektiv $\iff$ $\mathrm{Bild}(f) = H$.

(7.13) BEISPIELE: Wir geben für die Gruppenhomomorphismen aus (7.2) den jeweiligen Kern und das jeweilige Bild an. Die Numerierung entspricht der von (7.2).

a) $\mathrm{Kern}(f) = G$, $\mathrm{Bild}(f) = \{ e_H \}$

b) $\mathrm{Kern}(\mathrm{id}_G) = \{ e_G \}$, $\mathrm{Bild}(\mathrm{id}_G) = G$

c) $\mathrm{Kern}(\det) = \{ A \mid A \in \mathrm{GL}_n(K), \det(A) = 1 \} = \mathrm{SL}_n(K)$, $\mathrm{Bild}(\det) = K^\star$

d) $\mathrm{Kern}(\mathrm{sign}) = \{ \pi \mid \pi \in S_n, \mathrm{sign}(\pi) = 1 \} = A_n$, $\mathrm{Bild}(\mathrm{sign}) = \{ 1, -1 \}$

e) $\mathrm{Kern}(b) = \{ z \mid z \in \mathbb{C}^\star, |b| = 1 \}$, $\mathrm{Bild}(b) = \mathbb{R}_{>0}$

f) $\mathrm{Kern}(\exp) = \{ 0 \}$, $\mathrm{Bild}(\exp) = \mathbb{R}_{>0}$

h) $\mathrm{ord}\,(a) = m < \infty :$ $\mathrm{Kern}(f) = \mathbb{Z} m$, $\mathrm{ord}\,(a) = \infty :$ $\mathrm{Kern}(f) = \{ 0 \}$

In beiden Fällen gilt $\mathrm{Bild}(f) = \langle a \rangle$.