§ 6. Die symmetrische Gruppe $(S_n, \circ)$ (Fortsetzung)

(6.5) KOROLLAR: Für $n \geq 2$ ist die Menge T_n der Transpositionen aus S_n ein EZS der Gruppe $(S_n, \circ)$.

(6.6) LEMMA: **a)** Ein r–Zyklus aus S_n hat die Ordung r.

b) Ist $\pi \in S_n$ Produkt von paarweise disjunkten r_i–Zyklen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$, so gilt

$$\mathrm{ord}(\pi) = \mathrm{kgV}(r_1, \ldots, r_s)$$

Das Vorzeichen einer Permutation

In der Linearen Algebra II ist bei der Behandlung von Determinanten das Vorzeichen einer Permutation eingeführt worden (s. Einschub C, Lin.Alg.II, SS 2005). Wir fassen noch einmal das Wichtigste zusammen:

(6.7) BEM: **a)** Ein Zahlenpaar $(i, k) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$ heißt eine **Inversion** (oder ein **Fehlstand**) einer Permutation $\pi \in S_n$, wenn

$$i < k \quad \text{und} \quad \pi(i) > \pi(k)$$

gilt. Es bezeichne $\nu(\pi)$ die Anzahl der Inversionen von π.

b) Das **Vorzeichen sign(π)** einer Permutation $\pi \in S_n$ ist definiert durch

$$\mathrm{sign}(\pi) := (-1)^{\nu(\pi)}$$

c) Eine Permutation $\pi \in S_n$ heißt **gerade**, wenn $\nu(\pi)$ eine gerade Zahl ist (d.h. $\mathrm{sign}(\pi) = 1$), ansonsten **ungerade** (d.h. $\mathrm{sign}(\pi) = -1$).

d) Eine Transposition ist immer ungerade.

e) Für $\pi, \rho \in S_n$ gilt: $\mathrm{sign}(\pi \circ \rho) = \mathrm{sign}(\pi) \cdot \mathrm{sign}(\rho)$.

(6.8) LEMMA: Für einen r–Zyklus $\sigma \in S_n$ gilt:

a) $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{r-1}$.

b) σ gerade $\iff$ r ungerade.

Die alternierende Gruppe $(A_n, \circ)$

(6.9) SATZ: Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ sei A_n die Menge der geraden Permutationen aus S_n , d.h.

$$A_n \;=\; \{\pi \mid \pi \in S_n, \pi \text{ gerade}\}$$

a) A_n ist eine Untergruppe von $(S_n, \circ)$.

$(A_n, \circ)$ heißt **alternierende Gruppe** von n Elementen .

b) Jede Untergruppe von $(S_n, \circ)$ enthält entweder nur gerade Permutationen oder gleichviel gerade wie ungerade Permutationen .

c) $|A_n| \;=\; \frac{1}{2}\, n!$.

d) $(A_n, \circ)$ abelsch $\quad \Longleftrightarrow \quad n \leq 3$

(6.10) LEMMA: Sei $n \geq 3$. Dann erzeugen die Dreierzyklen aus S_n die alternierende Gruppe $(A_n, \circ)$

(6.11) LEMMA: Die symmetrische Gruppe $(S_3, \circ)$

a) Die Elemente von S_3 sind

$\pi_0 = (1)$, $\pi_1 = (1\ 2\ 3)$, $\pi_2 = (3\ 2\ 1)$, $\pi_3 = (2\ 3)$, $\pi_4 = (1\ 3)$, $\pi_5 = (1\ 2)$

b)

Zyklenstruktur	Anzahl	Ordnung	Vorzeichen
(1)	1	1	1
(1 2)	3	2	–1
(1 2 3)	2	3	1
	6		

c) $A_3 \;=\; \{\pi_0, \pi_1, \pi_2\} \;=\; \langle\, \pi_1 \,\rangle \;=\; \langle\, \pi_2 \,\rangle$

d) Der Untergruppenverband von $(S_3, \circ)$

6		S_3
3	A_3	
2		$\langle \pi_3 \rangle \quad \langle \pi_4 \rangle \quad \langle \pi_5 \rangle$
1	$\langle \pi_0 \rangle$	

(6.12) LEMMA: Die symmetrische Gruppe $(S_4, \circ)$

a) Übersicht über die Elemente von S_4:

Zyklenstruktur	Anzahl	Ordnung	Vorzeichen
(1)	1	1	1
(1 2)	6	2	–1
(1 2 3)	8	3	1
(1 2 3 4)	6	4	–1
(1 2) (3 4)	3	2	1
	24		

b) A_4 besteht aus dem neutralen Element ε, acht 3–Zyklen und drei Produkten disjunkter 2–Zyklen.

Der Untergruppenverband von $(A_4, \circ)$

(6.13) SATZ: In der alternierenden Gruppe $(A_4, \circ)$, die die Ordnung 12 hat, gibt es **keine** Untergruppe der Ordnung 6.

Der Untergruppenverband von $(S_4, \circ)$