§ 6 . Die symmetrische Gruppe $(S_n, \circ)$ (Fortsetzung)

(6.5) KOROLLAR: Für $n \geq 2$ ist die Menge T_n der Transpositionen aus S_n ein EZS der Gruppe $(S_n, \circ)$.

(6.6) LEMMA: **a)** Ein r–Zyklus aus S_n hat die Ordung r .

b) Ist $\pi \in S_n$ Produkt von paarweise disjunkten r_i–Zyklen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$, so gilt

$$\mathrm{ord}(\pi) \;=\; \mathrm{kgV}(\mathrm{r_1}, \ldots, \mathrm{r_s})$$

Das Vorzeichen einer Permutation

In der Linearen Algebra II ist bei der Behandlung von Determinanten das Vorzeichen einer Permutation eingeführt worden (s. Einschub C, Lin.Alg.II, SS 2005) . Wir fassen noch einmal das Wichtigste zusammen:

(6.7) BEM: **a)** Ein Zahlenpaar $(i, k) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$ heißt eine **Inversion** (oder ein **Fehlstand**) einer Permutation $\pi \in S_n$, wenn

$$i < k \;\text{ und }\; \pi(i) > \pi(k)$$

gilt. Es bezeichne $\nu(\pi)$ die Anzahl der Inversionen von π.

b) Das **Vorzeichen** $\mathrm{sign}(\pi)$ einer Permutation $\pi \in S_n$ ist definiert durch

$$\mathrm{sign}(\pi) \;:=\; (-1)^{\nu(\pi)}$$

c) Eine Permutation $\pi \in S_n$ heißt **gerade**, wenn $\nu(\pi)$ eine gerade Zahl ist (d.h. $\mathrm{sign}(\pi) = 1$) , ansonsten **ungerade** (d.h. $\mathrm{sign}(\pi) = -1$) .

d) Eine Transposition ist immer ungerade.

e) Für $\pi, \rho \in S_n$ gilt: $\mathrm{sign}(\pi \circ \rho) \;=\; \mathrm{sign}(\pi) \cdot \mathrm{sign}(\rho)$.

(6.8) LEMMA: Für einen r–Zyklus $\sigma \in S_n$ gilt:

a) $\mathrm{sign}(\sigma) \;=\; (-1)^{\mathrm{r}-1}$.

b) σ gerade $\iff$ r ungerade .

Die alternierende Gruppe $(\boldsymbol{A_n}, \circ)$

(6.9) SATZ: Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ sei A_n die Menge der geraden Permutationen aus S_n, d.h.

$$A_n \; = \; \{\pi \mid \pi \in S_n, \pi \text{ gerade}\}$$

a) A_n ist eine Untergruppe von $(S_n, \circ)$.

$(A_n, \circ)$ heißt **alternierende Gruppe** von n Elementen.

b) Jede Untergruppe von $(S_n, \circ)$ enthält entweder nur gerade Permutationen oder gleichviel gerade wie ungerade Permutationen.

c) $|A_n| \; = \; \frac{1}{2}\, n!\,.$

d) $(A_n, \circ)$ abelsch $\quad \Longleftrightarrow \quad n \leq 3$

(6.10) LEMMA: Sei $n \geq 3$. Dann erzeugen die Dreierzyklen aus S_n die alternierende Gruppe $(A_n, \circ)$

(6.11) LEMMA: Die symmetrische Gruppe $(S_3, \circ)$

a) Die Elemente von S_3 sind

$\pi_0 = (1)$, $\pi_1 = (1\;2\;3)$, $\pi_2 = (3\;2\;1)$, $\pi_3 = (2\;3)$, $\pi_4 = (1\;3)$, $\pi_5 = (1\;2)$

b)

Zyklenstruktur	Anzahl	Ordnung	Vorzeichen
(1)	1	1	1
(1 2)	3	2	–1
(1 2 3)	2	3	1
	6		

c) $A_3 \; = \; \{\pi_0, \pi_1, \pi_2\} \; = \; \langle\, \pi_1 \,\rangle \; = \; \langle\, \pi_2 \,\rangle$

d) Der Untergruppenverband von $(S_3, \circ)$

6		S_3			
3	A_3				
2			$\langle \pi_3 \rangle$	$\langle \pi_4 \rangle$	$\langle \pi_5 \rangle$
1		$\langle \pi_0 \rangle$			

(6.12) LEMMA: Die symmetrische Gruppe $(S_4, \circ)$

a) Übersicht über die Elemente von S_4:

Zyklenstruktur	Anzahl	Ordnung	Vorzeichen
(1)	1	1	1
(1 2)	6	2	–1
(1 2 3)	8	3	1
(1 2 3 4)	6	4	–1
(1 2) (3 4)	3	2	1
	24		

b) A_4 besteht aus dem neutralen Element ε, acht 3–Zyklen und drei Produkten disjunkter 2–Zyklen.

Der Untergruppenverband von $(A_4, \circ)$

(6.13) SATZ: In der alternierenden Gruppe $(A_4, \circ)$, die die Ordnung 12 hat, gibt es **keine** Untergruppe der Ordnung 6.

Der Untergruppenverband von $(S_4, \circ)$