§ 6. Die symmetrische Gruppe $(S_n, \circ)$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist S_n die Menge aller Permutationen der Zahlen $1, 2, \dots, n$ oder gleichbedeutend damit die Menge aller bijektiven Abbildungen der Menge $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \dots, n\}$ auf sich. S_n ist bzgl. der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die für $n \geq 3$ nichtabelsch ist. Die Ordnung von S_n ist $n!$ (s.(1.14)).

(6.1) DEF: **a)** Eine Permutation $\boldsymbol{\sigma \in S_n}$ heißt ein **Zyklus**, wenn es eine Zahl $\boldsymbol{r \geq 2}$ und paarweise verschiedene Zahlen $\boldsymbol{k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{N}_n}$ gibt mit

$$\boldsymbol{\sigma(k_i) = k_{i+1} \quad \forall\, i \in \{1, 2, \dots, r-1\}} \qquad , \qquad \boldsymbol{\sigma(k_r) = k_1}$$

$$\boldsymbol{\sigma(k) = k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_n \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_r\}}$$

Schreibweise: $\boldsymbol{\sigma = (k_1\ k_2\ \dots\ k_r)}$

$\boldsymbol{r}$ heißt dann die **Länge** von $\boldsymbol{\sigma}$, und man nennt $\boldsymbol{\sigma}$ auch einen $\boldsymbol{r}$**–Zyklus**

Ein Zyklus der Länge 2 heißt auch eine **Transposition**, einer der Länge 3 ein **Dreierzyklus**. Die Identität ist ein **1–Zyklus**.

b) Zwei Zyklen $\boldsymbol{(k_1\ k_2\ \dots\ k_r)}$ und $\boldsymbol{(l_1\ l_2\ \dots\ l_s)}$ heißen **disjunkt**, wenn $\boldsymbol{\{k_1, k_2, \dots, k_r\} \cap \{l_1, l_2, \dots, l_s\} = \emptyset}$ gilt.

(6.2) BEM: **a)** $\boldsymbol{(k_1\ k_2\ \dots\ k_r) = (k_2\ k_3\ \dots\ k_r\ k_1) = \dots = (k_r\ k_1\ k_2\ \dots\ k_{r-1})}$.

b) $\boldsymbol{(k_1\ k_2\ \dots\ k_r)^{-1} = (k_r\ k_{r-1}\ \dots\ k_1)}$

c) Disjunkte Zyklen sind vertauschbar:

$\boldsymbol{(k_1\ k_2\ \dots\ k_r) \circ (l_1\ l_2\ \dots\ l_s) = (l_1\ l_2\ \dots\ l_s) \circ (k_1\ k_2\ \dots\ k_r)}$.

(6.3) SATZ: Jede Permutation $\boldsymbol{\pi \in S_n}$ ist darstellbar als Hintereinanderausführung (auch "Produkt") von paarweise disjunkten Zyklen. Diese Darstellung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Zyklen.

(6.4) KOROLLAR: **a)** Jeder Zyklus ist ein Produkt von Transpositionen.

b) Jede Permutation ist ein Produkt von Transpositionen.

(6.5) KOROLLAR: Für $\boldsymbol{n \geq 2}$ ist die Menge $\boldsymbol{T_n}$ der Transpositionen aus $\boldsymbol{S_n}$ ein EZS der Gruppe $\boldsymbol{(S_n, \circ)}$.

(6.6) LEMMA: **a)** Ein $\boldsymbol{r}$–Zyklus aus $\boldsymbol{S_n}$ hat die Ordung $\boldsymbol{r}$.

b) Ist $\boldsymbol{\pi \in S_n}$ Produkt von paarweise disjunkten $\boldsymbol{r_i}$–Zyklen $\boldsymbol{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s}$, so gilt

$$\mathbf{ord}(\pi) = \mathbf{kgV}(r_1, \dots, r_s)$$