§12. Symmetriegruppen

Im folgenden betrachten wir die anschauliche Ebene E, die wir als Vektorraum mit dem $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Damit ist E ein zwei–dimensionaler euklidischer Vektorraum mit dem kanonischen Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und der daraus resultierenden Metrik (Abstandsfunktion) $d : \mathsf{E} \times \mathsf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(12.1) DEF: Eine Abbildung $f : \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{E}$ heißt eine **Isometrie** (oder Bewegung oder Kongruenzabbildung), wenn f die Abstände von Punkten erhält, d.h.

$$d(f(P), f(Q)) \;=\; d(P,Q) \qquad (\forall\, P,Q \in \mathsf{E})$$

Mit $\mathcal{I} = \mathrm{Iso}(\mathsf{E})$ werde die Menge aller Isometrien von E bezeichnet.

Man kann ist zeigen, daß eine Isometrie eine affine Abbildung ist, genauer:

(12.3) BEM: **a)** Ist $f : \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{E}$ eine Isometrie, so gibt es eine orthogonale Abbildung $g : \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{E}$ (eine solche Abbildung hat eine orthogonale Darstellungsmatrix bzgl. einer ONB) und einen Punkt $Q \in \mathsf{E}$, so daß gilt

$$f(P) \;=\; g(P) + Q \qquad (\forall\, P \in \mathsf{E})$$

b) f ist genau dann linear (und damit orthogonal), wenn $f(0) = 0$ gilt (d.h. $Q = 0$).

c) Jede Isometrie ist bijektiv.

(12.4) SATZ: Die Menge $\mathcal{I}$ aller Isometrien ist eine Gruppe bzgl. der Hintereinanderausführung (genauer: $\mathcal{I}$ ist eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $(S_{\mathsf{E}}, \circ)$ von E.

(12.5) BEM: **a)** P heißt **Fixpunkt** einer Isometrie f, wenn $f(P) = P$ gilt.

b) Sei $P \in \mathsf{E}$. Dann ist die Menge $\mathrm{Iso}(\mathsf{E}, P)$ aller Isometrien mit P als Fixpunkt eine Untergruppe von $(\mathcal{I}, \circ)$.

b) $\mathrm{Iso}(\mathsf{E}, 0)$ ist die Gruppe aller orthogonalen Abbildungen $\mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{E}$. Die Darstellungsmatrizen solcher Abbildungen wurden in den Übungsafgaben 16 und 20 genauer untersucht.

c) $\mathrm{Iso}(\mathsf{E}, 0)$ wird aus allen Drehungen um den Nullpunkt und allen Spiegelungen, deren Spiegelachsen durch 0 gehen, gebildet.

d) Die Menge $\mathcal{D}$ aller Drehungen um 0 ist eine Untergruppe von $\mathrm{Iso}(\mathsf{E}, 0)$.

e) Die Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen aus $\mathrm{Iso}(\mathsf{E}, 0)$ ist eine Drehung $\mathcal{D}$.

f) Die Hintereinanderausführung einer Spiegelung und einer Drehung aus $\mathrm{Iso}(\mathsf{E}, 0)$ ist eine Spiegelung aus $\mathrm{Iso}(\mathsf{E}, 0)$.

(12.6) BEM: **a)** Jede Isometrie von E ist eine Hintereinanderausführung von höchstens 3 Spiegelungen.

b) Die Menge der Spiegelungen aus $\mathcal{I}$ ist ein EZS der Gruppe $(\mathcal{I}, \circ)$.

c) Folgende Isometrien können auftreten:

- Spiegelungen an einer Achse
- Translationen (Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen an parallelen Spiegelachsen)
- Drehungen (Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen an sich schneidenden Spiegelachsen)
- Schubspiegelungen (Spiegelung verknüpft mit einer Translation in Richtung der Spiegelachse)

(12.7) DEF: Sei $F \subseteq \mathsf{E}$ eine nichtleere Teilmenge.

a) Eine Isometrie $s : \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{E}$ heißt eine **Symmetrie von *F***, wenn $s(F) = F$ gilt.

b) $\mathrm{Symm}(F)$ bezeichne die Menge aller Symmetrien von F.

Achtung! $s(F) = F$ bedeutet die Gleichheit zweier Mengen, nicht aber, daß die Punkte aus F festgelassen werden.

(12.8) SATZ: Sei $\emptyset \neq F \subseteq \mathsf{E}$. Dann ist $\mathrm{Symm}(F)$ eine Untergruppe von $(\mathrm{Iso}(\mathsf{E}), \circ)$.

(12.9) DEF: Sei $\emptyset \neq F \subseteq \mathsf{E}$. Dann heißt $(\mathrm{Symm}(\mathsf{E}), \circ)$ die **Symmetriegruppe von *F***.

$\mathrm{Symm}(F)$ ist ein "Maß" für die Symmetrie der ebenen Figur F.

(12.10) BEISPIELE: **a)** Die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks enthält genau 3 Drehungen und 3 Spiegelungen und ist isomorph zu S_3 oder Δ_3.

b) Die Symmetriegruppe eines regelmäßigen Sechsecks enthält genau 6 Drehungen und 6 Spiegelungen und ist isomorph zu Δ_6.

c) Die Symmetriegruppe eines Kreises K enthält unendlich viele Drehungen (um den Kreismittelpunkt) und unendlich viele Spiegelungen (an Achsen durch den Kreismittelpunkt), aber keine Translationen oder Schubspiegelungen: $|\,\mathrm{Symm}(K)\,| = \infty$.

d) Die Symmetriegruppe eines Bandornamentes:

Eine Figur $\emptyset \neq B \subseteq \mathsf{E}$ heißt ein **Bandornament** (oder Streifenornament), wenn es eine Translation τ $(\neq \mathrm{id}_{\mathsf{E}})$ als Symmetrie gibt, so daß $\langle\tau\rangle = \{\,\tau^n \mid n \in \mathbb{Z}\,\}$ die Menge aller Translationen ist, die Symmetrien von B sind. τ wird dann auch eine **Periode** des Bandornamentes genannt. Daneben kann es auch noch andere Symmetrien geben.

e) Die Symmetriegruppe eines Flächenornamentes.:

Eine Figur $\emptyset \neq F \subseteq \mathsf{E}$ heißt ein **Flächenornament**, wenn es zwei Translationen $\sigma, \tau \in \mathrm{Symm}(F)$ mit linear unabhängigen Richtungen gibt, so daß sich jede Translation $\rho \in \mathrm{Symm}(F)$ in der Form

$$\rho \;=\; \sigma^m \circ \tau^n \qquad (\text{mit } m, n \in \mathbb{Z})$$

darstellen läßt. Wählt man Translationen σ, τ mit linear unabhängigen Richtungen, so daß die Länge der Verschiebungsvektoren minimal ist, so heißt ein Parallelogramm mit den Eckpunkten

$$P, \sigma(P), \tau(P), (\sigma \circ \tau)(P) \qquad (P \in \mathsf{E})$$

ein **Elementarbereich** des Fächenornamentes zu den Perioden σ und τ. Die Elementarbereiche eines Fächenornamentes sind zwar nicht eindeutig bestimmt, haben jedoch alle denselben Flächeninhalt.

(12.11) SATZ: Sei $n \geq 2$ und $\mathcal{E}_n$ das regelmäßige n–Eck. Für die Symmetriegruppe D_n von $\mathcal{E}_n$ gilt:

a) $(D_n, \circ)$ ist eine Gruppe der Ordnung $2n$.

b) $(D_n, \circ)$ ist für $n \geq 3$ nichtabelsch.

c) Es gibt Elemente $\sigma, \delta \in D_n$ mit folgenden Eigenschaften:

- **i)** $\mathrm{ord}(\delta) = n$, $\mathrm{ord}(\sigma) = 2$
- **ii)** $\delta\,\sigma \;=\; \sigma\,\delta^{-1}$
- **iii)** $D_n = \langle\, \delta, \sigma \,\rangle \;=\; \{\, \mathrm{id}_{\mathsf{E}}, \delta, \delta^2, \ldots, \delta^{n-1}, \sigma, \delta\sigma, \delta^2\sigma, \ldots, \delta^{n-1}\sigma \,\}$

D_n heißt **Diedergruppe**.

(12.12) KOROLLAR: Für $n \geq 3$ gilt $D_n \cong \Delta_n$.