§11. Gruppen kleiner Ordnung

Problem: Gegeben sei eine natürliche Zahl n. Bestimme (bis auf Isomorphie) alle Gruppen der Ordnung n.

Für abelsche Gruppen ist dieses Problem durch den Hauptsatz vollständig gelöst. Wir kennen einige Ergebnisse: Ist p eine Primzahl und G eine Gruppe, so gilt

$\lvert G\rvert$	Ergebnis
p	$G \cong \mathbb{Z}_p$ (zyklisch)
p^2	G ist abelsch mit $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ (zyklisch) oder $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ (s. Aufgabe 51)
$4 = 2^2$	$G \cong \mathbb{Z}_4$ (zyklisch) oder $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (Kleinsche Vierergruppe).

All diese Gruppen sind **abelsch**. Außerdem gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine abelsche Gruppe der Ordnung n, nämlich die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_n$. Wie oben gesehen, muß es dagegen zu einer ungeraden Zahl n keine nichtabelsche Gruppe der Ordnung n geben. In den Aufgaben 16 und 20 wurde für eine natürliche Zahl $n \geq 3$ eine **nichtabelsche** Gruppe der Ordnung $2n$ konstruiert. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$D(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(2) \quad \text{(Drehmatrix)}$$

$$S(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(2) \quad \text{(Spiegelungsmatrix)}$$

(11.1) LEMMA: Sei $n \geq 3$. Setze $W_n := \{\, k \cdot \frac{2\pi}{n} \mid k = 0, 1, \ldots, n-1 \,\}$ und

$$\Delta_n := \{\, D(\alpha) \mid \alpha \in W_n \,\} \cup \{\, S(\alpha) \mid \alpha \in W_n \,\}\ .$$

Ferner seien

$$D := D\left(\frac{2\pi}{n}\right) \quad \text{und} \quad S := S\left(\frac{2\pi}{n}\right)\ .$$

Dann gilt:

a) Δ_n ist eine Untergruppe von $(\mathcal{O}(2), \cdot)$

b) $\operatorname{ord}(D) = n$, $\operatorname{ord}(S) = 2$ **c)** $D \cdot S = S \cdot D^{-1} = S \cdot D^{n-1}$

d) $\Delta_n = \langle\, D, S \,\rangle = \{\, D^j \cdot S^k \mid 0 \leq j < n,\ 0 \leq k < 2 \,\}$

e) Δ_n ist eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung $2n$.

Zu jeder geraden ganzen Zahl $m \geq 6$ gibt es also eine **nichtabelsche** Gruppe der Ordnung m.

(11.2) SATZ: Sei $n \geq 3$. In der Gruppe G gebe es Elemente $a, b \in G$ mit

1) $\mathrm{ord}(a) = n$, $\mathrm{ord}(b) = 2$

2) $ab = ba^{-1} = ba^{n-1}$

3) $G = \langle a, b \rangle$.

Dann folgt: $G \cong \Delta_n$.

(11.3) SATZ: Sei $p \geq 3$ eine Primzahl. Ist dann G eine Gruppe der Ordnung $2p$, so folgt

$$G \cong \mathbb{Z}_{2p} \quad \text{oder} \quad G \cong \Delta_p .$$

(11.4) KOROLLAR: Ist G eine Gruppe der Ordnung 6, so gilt entweder $G \cong \mathbb{Z}_6$ (falls G abelsch ist) oder $G \cong \Delta_3$ (falls G nichtabelsch ist).

(11.5) LEMMA: Für eine nichtabelsche Gruppe G der Ordnung 8 gilt

$$G \cong \Delta_4 \quad \text{oder} \quad G \cong Q \quad \text{(Quaternionengruppe)} .$$

(11.6) SATZ: Sei G eine Gruppe mit $|G| = pq$, wobei p und q Primzahlen mit $p > q$ sind. Dann gilt:

a) Im Falle $q \nmid p-1$ ist G zyklisch.

b) Im Falle $q | p-1$ gibt es bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen, von denen eine abelsch (und zyklisch) und die andere nichtabelsch ist.

Zusammenfassend erhalten wir die folgende **Übersicht:** Seien $p, q \in \mathbb{P}$ und G sei eine Gruppe.

$\lvert G \rvert$	$G \cong$
p	$\mathbb{Z}_p$
p^2	$\mathbb{Z}_{p^2}$ oder $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$
$2p$ $(p \geq 3)$	$\mathbb{Z}_{2p}$ oder Δ_p
pq $(p > q)$	$q \nmid p-1$: $\mathbb{Z}_{pq}$
	$q \mid p-1$: $\mathbb{Z}_{pq}$ oder nichtabelsch
8	Q oder Δ_4 (falls G nichtabelsch)

(11.7) SATZ: Sei $n \geq 4$ eine **gerade** Zahl. Dann gibt es eine Gruppe Q_n mit folgenden Eigenschaften:

a) Q_n wird von zwei Elementen a und b erzeugt, für die $a^n = 1$, $b^2 = a^{n/2}$, $bab^{-1} = a^{-1}$ gilt.

b) Q_n ist eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung $2n$.

c) Im Falle $n = 4$ ist $Q_4 \cong Q$ (Quaternionengruppe) .

Q_n heißt **dizyklische Gruppe** .