Anmerkungen zum Untergruppenverband von $(S_4, \circ)$

Die Hochzahlen in Klammern geben jeweils die Anzahl des jeweiligen Untergruppentyps an.

Die rot eingezeichneten Untergruppen bilden den Untergruppenverband von $(\boldsymbol{A_4}, \circ)$.

Zu den einzelnen Untergruppen:

Das neutrale Element $\boldsymbol{\varepsilon}$ erzeugt die einzige Untergruppe der Ordnung **1**.

6 Transpositionen $\boldsymbol{t_j}$ erzeugen zykl. Untergruppen $\langle \boldsymbol{t_j} \rangle$ der Ordnung **2**.

3 Produkte disjunkter Transpositionen $\boldsymbol{\tau_i}$ erzeugen zyklische Untergruppen $\langle \boldsymbol{\tau_i} \rangle$ der Ordnung **2**.

4 Dreierzyklen $\boldsymbol{d_k}$ erzeugen zyklische Untergruppen $\langle \boldsymbol{d_k} \rangle$ der Ordnung **3**.

$\boldsymbol{V = \{\varepsilon, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}}$ ist eine Kleinsche Vierergruppe der Ordnung **4** .

3 Viererzyklen $\boldsymbol{v_i}$ erzeugen zyklische Untergruppen $\langle \boldsymbol{v_i} \rangle$ der Ordnung **4**.

Jeweils zwei Transpositionen erzeugen eine Kleinsche Vierergruppe $\boldsymbol{K_i}$, die die Ordnung **4** hat.

Es gibt **4** Untergruppen $\boldsymbol{\hat{S}_3}$ der Ordnung **6**, die vom Typ $\boldsymbol{S_3}$ sind.

Es gibt **3** Untergruppen $\boldsymbol{\hat{D}_4}$ der Ordnung **8**, die vom Typ $\boldsymbol{\Delta_4}$ sind.

$\boldsymbol{A_4}$ ist die einzige Untergruppe der Ordnung **12**.

$\boldsymbol{S_4}$ ist die einzige Untergruppe der Ordnung **24**.

Fazit: $(\boldsymbol{S_4}, \circ)$ hat insgesamt **30** Untergruppen. **10** davon sind auch Untergruppen von $\boldsymbol{A_4}$.