Die Gruppe $(S_3, \circ)$

Diese Gruppe wurde in den Übungen behandelt. Es ist

$$S_3 \;=\; \{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5\}$$

die Menge aller Permutationen

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \;,\; \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \;,\; \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;,$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \;,\; \pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \;,\; \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

der drei Zahlen 1,2,3 .

$(S_3, \circ)$ ist eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung $3! = 6$.

Gruppentafel von $(S_3, \circ)$:

$\circ$	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
π_0	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
π_1	π_1	π_2	π_0	π_5	π_3	π_4
π_2	π_2	π_0	π_1	π_4	π_5	π_3
π_3	π_3	π_4	π_5	π_0	π_1	π_2
π_4	π_4	π_5	π_3	π_2	π_0	π_1
π_5	π_5	π_3	π_4	π_1	π_2	π_0

Untergruppen von $(S_3, \circ)$:

Die folgende Liste enthält **alle** Untergruppen von $(S_3, \circ)$:

$\langle\pi_0\rangle \;=\; \{\pi_0\}$

$\langle\pi_1\rangle \;=\; \{\pi_0, \pi_1, \pi_2\} \;=\; \langle\pi_2\rangle$

$\langle\pi_3\rangle \;=\; \{\pi_0, \pi_3\}$

$\langle\pi_4\rangle \;=\; \{\pi_0, \pi_4\}$

$\langle\pi_5\rangle \;=\; \{\pi_0, \pi_5\}$

S_3

Fazit: $(S_3, \circ)$ ist eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 6. Zu jedem positiven Teiler t von 6 gibt es (mindestens) eine Untergruppe von $(S_3, \circ)$, die die Ordnung t hat. Es gibt 1 Untergruppe der Ordnung 3 und 3 Untergruppen der Ordnung 2 .

$(S_3, \circ)$ ist nicht zyklisch, jedoch ist jede Untergruppe $\neq S_3$ zyklisch.