Die Gruppe $(\Delta_3, \cdot)$

Diese Gruppe wurde in Aufgabe 20 behandelt. Es ist

$$\Delta_3 \;=\; \{M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$$

die Menge aller (2×2)–Matrizen

$$M_0 = D(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;,\; M_1 = D(\tfrac{2\pi}{3}) \;,\; M_2 = D(\tfrac{4\pi}{3}) \;,\; M_3 = S(\tfrac{4\pi}{3}) \;,\; M_4 = S(\tfrac{2\pi}{3}) \;,\; M_5 = S(0)$$

$(\Delta_3, \cdot)$ ist eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 6, insbesondere eine Untergruppe von $(\mathcal{O}(2), \cdot)$.

Gruppentafel von $(\Delta_3, \cdot)$:

$\cdot$	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
M_0	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
M_1	M_1	M_2	M_0	M_5	M_3	M_4
M_2	M_2	M_0	M_1	M_4	M_5	M_3
M_3	M_3	M_4	M_5	M_0	M_1	M_2
M_4	M_4	M_5	M_3	M_2	M_0	M_1
M_5	M_5	M_3	M_4	M_1	M_2	M_0

Untergruppen von $(\Delta_3, \cdot)$:

Die folgende Liste enthält **alle** Untergruppen von $(\Delta_3, \cdot)$:

$\langle M_0 \rangle \;=\; \{M_0\}$

$\langle M_1 \rangle \;=\; \{M_0, M_1, M_2\} \;=\; \langle M_2 \rangle$

$\langle M_3 \rangle \;=\; \{M_0, M_3\}$

$\langle M_4 \rangle \;=\; \{M_0, M_4\}$

$\langle M_5 \rangle \;=\; \{M_0, M_5\}$

Δ_3

Fazit: $(\Delta_3, \cdot)$ ist eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 6. Zu jedem positiven Teiler t von 6 gibt es (mindestens) eine Untergruppe von $(\Delta_3, \cdot)$, die die Ordnung t hat. Es gibt 1 Untergruppe der Ordnung 3 und 3 Untergruppen der Ordnung 2.

$(\Delta_3, \cdot)$ ist nicht zyklisch, jedoch ist jede Untergruppe $\neq \Delta_3$ zyklisch.

Frage: Wo haben wir schon etwas Ähnliches gesehen ?