Die Gruppe $(C_6, \circ)$

Diese Gruppe wird in Aufgabe 8 behandelt. Es ist

$$C_6 \; = \; \{d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$$

die Menge aller Drehungen der Ebene um den Nullpunkt, deren Drehwinkel ein ganzzahliges Vielfaches von $\dfrac{\pi}{3}$ ist (d_k hat den Drehwinkel $k \cdot \dfrac{\pi}{3}$).

$(C_6, \circ)$ ist eine abelsche Gruppe der Ordnung 6 .

Gruppentafel von $(C_6, \circ)$:

$\circ$	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
d_0	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
d_1	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_0
d_2	d_2	d_3	d_4	d_5	d_0	d_1
d_3	d_3	d_4	d_5	d_0	d_1	d_2
d_4	d_4	d_5	d_0	d_1	d_2	d_3
d_5	d_5	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4

Untergruppen von $(C_6, \circ)$:

Die folgende Liste enthält **alle** Untergruppen von $(C_6, \circ)$:

$$\begin{aligned}
\langle d_0 \rangle &= \{d_0\} \\
\langle d_1 \rangle &= C_6 = \langle d_5 \rangle \qquad (\Longrightarrow \quad (C_6, \circ) \text{ ist zyklisch}) \\
\langle d_2 \rangle &= \{d_0, d_2, d_4\} = \langle d_4 \rangle \\
\langle d_3 \rangle &= \{d_0, d_3\}
\end{aligned}$$

Fazit: $(C_6, \circ)$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung 6, deren erzeugende Elemente d_1 oder d_5 sind. Zu jedem positiven Teiler t von 6 gibt es genau eine Untergruppe von $(C_6, \circ)$, die die Ordnung t hat. Außerdem ist jede Untergruppe von $(C_6, \circ)$ wieder zyklisch.