9. Übungsblatt

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Abgabe: Do. 22.12.2005, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.
Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

34. Aufgabe: Die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^\star$ sei definiert durch $f(x) := e^{ix}$ $(\forall\, x \in \mathbb{R})$.

a) Beweise, daß $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^\star, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

b) Bestimme Kern(f) und Bild(f).

(Hinweis: Ergebnisse aus der Analysis dürfen benutzt werden) (3)

35. Aufgabe: $(G, \star)$ sei eine Gruppe. Die Abbildung $f : G \longrightarrow G$ sei definiert durch $f(a) := \overline{a}$ $(\forall\, a \in G)$. Beweise:

a) f ist bijektiv

b) $f : (G, \star) \longrightarrow (G, \star)$ ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn $(G, \star)$ abelsch ist. (3)

36. Aufgabe: $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \triangle)$ sei ein Gruppenhomorphismus. Beweise:

a) $f(a^{(n)}) \;=\; [f(a)]^{(n)}$ für alle $a \in G$ und $n \in \mathbb{Z}$.

(Hinweis: Der Fall $n \geq 0$ ist durch vollständige Induktion zu beweisen!)

b) Für alle $a \in G$ gilt $f(\langle a \rangle) \;=\; \langle f(a) \rangle$.

c) f surjektiv und $(G, \star)$ zyklisch $\Longrightarrow$ $(H, \triangle)$ zyklisch. (5)

37. Aufgabe: Sei $(G, \star)$ eine Gruppe der Ordnung ≥ 2, deren einzige Untergruppen $\{e\}$ und G sind. Beweise:

a) $(G, \star)$ ist zyklisch **b)** $(G, \star)$ ist eine endliche Gruppe

c) Die Ordnung von $(G, \star)$ ist eine Primzahl. (5)

***38. Aufgabe:** $(G, \star)$ sei eine beliebige Gruppe, M sei eine Menge und $f : G \longrightarrow M$ eine bijektive Abbildung. Beweise: Auf M läßt sich genau eine Verknüpfung $\sharp$ definieren, so daß gilt:

i) $(M, \sharp)$ ist eine Gruppe

ii) $f : (G, \star) \longrightarrow (M, \sharp)$ ist ein Gruppenisomorphismus. (3*)