8. Übungsblatt

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Abgabe: Do. 15.12.2005, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.
Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

30. Aufgabe: a) Beweise, daß eine Permutation $\pi \in S_n (n \geq 2)$ genau dann gerade ist, wenn sich π als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen darstellen läßt.

b) Finde eine Formel für die Anzahl aller r–Zyklen in S_n für $1 < r \leq n$.

c) Bestimme die größtmögliche Ordnung, die ein Element in $(S_{12}, \circ)$ haben kann. Gib ein solches Element an.

d) Beweise, daß die Gruppe $(A_n, \circ)$ für $n \geq 4$ nicht abelsch ist.

e) Sei $V := \{(1)\,,\,(1\ 2)(3\ 4)\,,\,(1\ 3)(2\ 4)\,,\,(1\ 4)(2\ 3)\} \subseteq S_4$. Beweise, daß V eine Untergruppe von $(A_4, \circ)$ ist. (5)

31. Aufgabe: Sei V eine Untergruppe von $(S_n, \circ)$ $(n \geq 2)$, und sei G die Menge der geraden Permutationen in V. Beweise:

a) G ist eine Untergruppe von $(V, \circ)$.

b) Es gilt entweder $|G| = |V|$ oder $|G| = \frac{1}{2} \cdot |V|$.

Hinweis: Betrachte im zweiten Fall die Linksnebenklassen nach G (in V). (3)

32. Aufgabe: Seien $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

a) Beweise: $A^2 = B^2$, $A^4 = B^4 = E$ (Einheitsmatrix) , $A^3 B = BA$.

b) Begründe, daß $Q := \langle A, B \rangle \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ eine nicht abelsche Gruppe der Ordnung 8 ist.

c) Bestimme die Ordnung eines jeden Elemntes aus $(Q, \cdot)$.

d) Bestimme den Untergruppenverband von $(Q, \cdot)$ und stelle ihn in übersichtlicher Form graphisch dar. (5)

33. Aufgabe: Für eine nichtleere Teilmenge $T \subseteq \mathbb{N}_n$ sei

$$F_T := \{\pi \mid \pi \in S_n\,,\ \pi(x) = x\ \forall\, x \in T\}$$

a) Beweise, daß F_T eine Untergruppe von $(S_n, \circ)$ ist.

b) Bestimme die Ordnung von F_T. (3)