7. Übungsblatt

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Abgabe: Do. 8.12.2005, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.
Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

26. Aufgabe: $(G, \star)$ sei eine endliche Gruppe der Ordnung n.

a) Sei n ungerade: Untersuche, ob es ein Element $\neq e$ in G gibt, das zu sich selbst invers ist.

b) Sei n gerade: Beweise, daß es mindestens ein Element $\neq e$ in G gibt, das zu sich selbst invers ist. Ist die Anzahl dieser Elemente immer gerade oder ungerade? (2)

27. Aufgabe: Bestimme in den folgenden Fällen den Untergruppenverband der Gruppe $(G, \star)$ und stelle ihn graphisch dar (achte dabei auf Übersichtlichkeit!):

a) $G = C_8$ **b)** $G = C_2 \times C_4$. (7)

28. Aufgabe: In dieser Aufgabe sollen die Gruppen der Ordnung 6 genauer untersucht werden. Beweise:

a) Es gibt keine Gruppe der Ordnung 6, in der jedes Element eine Ordnung ≤ 2 besitzt.

b) Ist $(G, \star)$ eine abelsche Gruppe der Ordnung 6, so ist $(G, \star)$ zyklisch.

c) Eine nichtabelsche Gruppe $(G, \star)$ der Ordnung 6 enthält Elemente $a, b \in G$ mit folgenden Eigenschaften:

- **i)** $\mathrm{ord}(a) = 3$, $\mathrm{ord}(b) = 2$ (korrigiert!)
- **ii)** $a \star b \neq b \star a$
- **iii)** $a \star b = b \star a^{(2)}$
- **iv)** $G = \{e, a, a^{(2)}, b, b \star a, b \star a^{(2)}\}$.

Welche Ordnung haben die übrigen Elemente?
Stelle die Gruppentafel für $(G, \star)$ auf.
Bestimme den Untergruppenverband von $(G, \star)$ und stelle ihn graphisch dar. (7)

***29. Aufgabe:** Beweise mit Methoden des fünften Paragraphen: Für jede natürliche Zahl n gilt $\sum_{t|n} \varphi(t) = n$, wobei links über alle positiven Teiler t von n summiert wird. (3*)