6. Übungsblatt

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Abgabe: Do. 1.12.2005, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.
Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

21. Aufgabe: Seien $(G, \star)$ eine beliebige Gruppe und M eine beliebige nichtleere Mengen. $\mathrm{Abb}(M, G)$ bezeichne die Menge aller Abbildungen von M nach G. Für $f, g \in \mathrm{Abb}(M, G)$ sei definiert

$$(f \circledast g)(x) \ := \ f(x) \star g(x) \quad \forall x \in M$$

Beweise:

a) Durch die obige Festsetzung wird eine Verknüpfung $\circledast$ auf $\mathrm{Abb}(M, G)$ definiert, so daß $(\mathrm{Abb}(M, G), \circledast)$ eine Gruppe wird.

b) $\star$ kommutativ $\Longrightarrow$ $\circledast$ kommutativ.

c) Ist $(G, \star)$ eine endliche Gruppe, so hat jedes Element in $(\mathrm{Abb}(M, G), \circledast)$ endliche Ordnung.

d) Ist $(H, \star)$ eine Gruppe der Ordnung 2, so ist die Ordnung von $(\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, H), \circledast)$ unendlich. Bestimme die Ordnung eines jeden Elements aus $(\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, H), \circledast)$. (5)

22. Aufgabe: $(G, \star)$ sei eine endliche Gruppe der Ordnung $m \cdot n$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen m und n. Ferner seien U und V Untergruppen von $(G, \star)$ der Ordnung m bzw. n, und es gelte $U \star V = V \star U$. Beweise:

a) $U \cap V \ = \ \{e\}$ **b)** $U \star V \ = \ G$. (3)

23. Aufgabe: Sei $(G, \star)$ eine Gruppe, in der jedes Element eine Ordnung ≤ 2 besitzt. Beweise, daß $(G, \star)$ abelsch ist. (2)

24. Aufgabe: Seien $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

a) Beweise: $A \cdot B \neq B \cdot A$

b) Bestimme $\mathrm{ord}(A)$, $\mathrm{ord}(B)$ und $\mathrm{ord}(A \cdot B)$ in der Gruppe $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$. (3)

25. Aufgabe: Sei $U \leq (\mathbb{C}^\star, \cdot)$ eine <u>endliche</u> Untergruppe. Beweise:

a) $|U| = n \quad \Longrightarrow \quad U = \mathrm{EW}_n$.

b) $W := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{EW}_n$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{C}^\star, \cdot)$, die unendlich ist. (3)

c*) Seien U und V endliche Untergruppen von $(\mathbb{C}^\star, \cdot)$.

- **i)** Beweise: $U \subseteq V \quad \Longleftrightarrow \quad |U|$ ist ein Teiler von $|V|$.
- **ii)** Bestimme die Ordnungen der Untergruppen $U \cap V$ und $U \cdot V$.
- **iii)** Veranschauliche die Situation in der Gauß´schen Zahlenebene in den Fällen $|U| = 4$ und $|V| = 6$ bzw. $|U| = 4$ und $|V| = 3$. (3*)