5. Übungsblatt

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Abgabe: Do. 24.11.2005, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.
Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

17. Aufgabe: Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Linksnebenklasse von $a \in \mathbb{Z}$ nach der Untergruppe $\langle n \rangle = \mathbb{Z}n$ von $(\mathbb{Z}, +)$ werde mit $[a]_n$ bezeichnet. Ferner sei $\mathbb{Z}_n := \mathcal{L}_{\mathbb{Z}n}(\mathbb{Z}) = \{ [a]_n \mid a \in \mathbb{Z} \}$ die Menge aller Linksnebenklassen nach $\mathbb{Z}n$. Beweise:

a) Die folgenden drei Aussagen sind für $a, b \in \mathbb{Z}$ äquivalent:

i) $[a]_n = [b]_n$ **ii)** $n \mid (a-b)$ **iii)** a und b haben bei Division durch n denselben Rest.

b) $\mathbb{Z}_n = \{ [0]_n, [1]_n, [2]_n, \ldots, [n-1]_n \}$

c) $|\mathbb{Z}_n| = n$. (5)

18. Aufgabe: In der Gruppe $(\mathbb{C}^\star, \cdot)$ sei $S := \{ z \mid z \in \mathbb{C}^\star, |z| = 1 \}$. Beweise:

a) $S \leq (\mathbb{C}^\star, \cdot)$

b) Für $z, w \in \mathbb{C}^\star$ gilt: $z \cdot S = w \cdot S \iff |z| = |w|$

c) Stelle die Linksnebenklassen $1 \cdot S$, $(1+i) \cdot S$, $(2i) \cdot S$ anschaulich in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

d) Stelle $\mathbb{C}^\star$ als disjunkte Vereinigung von Linksnebenklassen nach S dar. (3)

19. Aufgabe: In der Bezeichnungsweise von Aufgabe 16 gilt $\mathcal{D} \leq (\mathcal{O}(2), \cdot)$.

a) Bestimme alle Links– und Rechtsnebenklassen nach $\mathcal{D}$. Wieviele gibt es jeweils davon?

b) Beweise: $M \cdot \mathcal{D} = \mathcal{D} \cdot M$ für alle $M \in \mathcal{O}(2)$ (3)

20. Aufgabe: Sei $A := \{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$. Setze $\Delta_3 := \{D(\alpha) | \alpha \in A\} \cup \{S(\alpha) | \alpha \in A\}$, wobei $D(\alpha)$ und $S(\alpha)$ in Aufgabe 16 definiert sind.

a) Stelle die Verknüpfungstafel für $(\Delta_3, \cdot)$ auf.

b) Beweise, daß Δ_3 eine Untergruppe der Ordnung 6 von $(\mathcal{O}(2), \cdot)$ ist. Ist die Gruppe $(\Delta_3, \cdot)$ abelsch? (5)

c*) Sei $n \in \mathbb{N}$. Definiere in Verallgemeinerung von b) eine Untergruppe Δ_n von $(\mathcal{O}(2), \cdot)$, die die Ordnung $2n$ hat (ein Nachweis der Untergruppeneigenschaft ist erforderlich!). Für welche n ist diese Gruppe abelsch und für welche nicht? Finde in $(\Delta_n, \cdot)$ eine zyklische Untergruppe der Ordnung n und n Untergruppen der Ordnung 2. (3*)