4. Übungsblatt

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Abgabe: Do. 17.11.2005, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.
Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

13. Aufgabe: Sei $(G,\star)$ eine Gruppe. U und V seien Untergruppen von $(G,\star)$. Beweise:

a) $U \subseteq U \star V$ **b)** $U \star U = U$, $\overline{U} = U$

c) Ist $U \star V$ Untergruppe von $(G,\star)$, so folgt $U \star V = V \star U$

d) Im Falle $U \star V = V \star U$ gilt $U \star V = \langle U \cup V \rangle$

e) Für eine beliebige nichtleere Teilmenge $S \subseteq G$ gilt:

S Untergruppe von $(G,\star)$ $\iff$ $S \star \overline{S} \subseteq S$ (5)

14. Aufgabe: a) Bestimme den ggT g der Zahlen $a = 1386$ und $b = 1176$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus, und stelle g als ganzzahlige Linearkombination von a und b dar.

b) Bestimme das kgV der Zahlen a und b aus a).

c) Bestimme die Anzahl aller Teiler von 6552. (3)

15. Aufgabe: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und sei $g := \mathrm{ggT}(a,b) \neq 0$. Beweise:

a) $\mathrm{ggT}(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}) = 1$ (Beachte: $\frac{a}{g}, \frac{b}{g} \in \mathbb{Z}$).

b) Gelte $g = x_0 a + y_0 b$ mit $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) Für $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt $g = xa + yb$

ii) Es gibt $t \in \mathbb{Z}$ mit $x = x_0 - \frac{b}{g} \cdot t$ und $y = y_0 + \frac{a}{g} \cdot t$. (3)

16. Aufgabe: Setze $D(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, S(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$

für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{D} := \{D(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ und $\mathcal{S} := \{S(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Beweise:

a) $\mathcal{D} \cup \mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}(2)$. Was ist $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$? **b)** $\mathcal{D} \cdot \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \cdot \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \cdot \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$

c) $\mathcal{D}$ ist eine Untergruppe von $(\mathcal{O}(2), \cdot)$. Ist $(\mathcal{D}, \cdot)$ abelsch? Ist auch $\mathcal{S}$ eine Untergruppe von $(\mathcal{O}(2), \cdot)$? (5)

d*) Aus den Übungen ist bekannt, daß eine lineare Abbildung $E \longrightarrow E$ mit $D(\alpha)$ als Darstellungsmatrix eine Drehung der Ebene E um 0 mit dem Drehwinkel α ist. Wie läßt sich eine lineare Abbildunge mit $S(\alpha)$ als Darstellungsmatrix anschaulich beschreiben?

Beweise: $\mathcal{O}(2) \subseteq \mathcal{D} \cup \mathcal{S}$. (3*)