3. Übungsblatt

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Abgabe: Do. 10.11.2005, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.

Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

9. Aufgabe: $(G, \star)$ sei eine Gruppe und $a \in G$ ein beliebiges Element. Beweise: $\langle a \rangle = \langle \overline{a} \rangle$. (2)

10. Aufgabe: a) $(G, \star)$ sei eine abelsche Gruppe und $E = \{x, y\} \subseteq G$. Beweise:

$$\langle E \rangle \;=\; \{\, x^{(m)} \star y^{(n)} \,|\, m, n \in \mathbb{Z} \,\}$$

b) Beweise, daß $E := \{\,(2,3),(1,2)\,\}$ ein EZS der Produktgruppe $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \otimes)$ der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ mit sich ist. (5)

c*) Sei $F = \{(a,b),(c,d)\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Finde eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß F ein EZS von $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \otimes)$ ist, und beweise deine Behauptung. (3*)

11. Aufgabe: Sei $\mathbb{Q}_{>0}$ die Menge der positiven rationalen Zahlen.

a) Beweise, daß $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.

b) Untersuche, ob die Menge $\mathbb{P}$ aller Primzahlen ein EZS von $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist.

Hinweis: Jede natürliche Zahl ≥ 2 läßt sich als Produkt von Primzahlen darstellen.

c) Untersuche, ob $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ endlich erzeugbar ist. (6)

12. Aufgabe: $(G, \star)$ sei eine Gruppe und $\emptyset \neq U \subseteq G$ eine endliche Teilmenge. Beweise, daß U genau dann eine Untergruppe von $(G, \star)$ ist, wenn U abgeschlossen bzgl. $\star$ ist. (3)

Ein schönes Beispiel (außer Konkurrenz): Die Verknüpfung $\star$ auf der Menge $M = \{a,b,c,d,e,f\}$ sei durch die folgende Verknüpfungstafel definiert:

$\star$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	c	a	e	f	d
c	c	a	b	f	d	e
d	d	e	f	c	b	a
e	e	f	d	b	a	c
f	f	d	e	a	c	b

Aus dieser Tafel liest man ab:

$\star$ ist kommutativ

Es gibt ein neutrales Element

Jedes Element aus M ist invertierbar

In jeder Zeile und Spalte kommt jedes Element von M genau einmal vor

Aber: $(M, \star)$ ist **keine** Gruppe! (Wieso?)