2. Übungsblatt

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Abgabe: Do. 3.11.2005, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/~ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.
Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

5. Aufgabe: Seien $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

Berechne in der Produktgruppe $(S_4 \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \otimes)$:

a) $(\rho, A) \otimes (\sigma, B)$

b) das Inverse von (σ, B)

c) die Potenz $(\rho, A)^{(-3)}$

d) Welches ist das neutrale Element? (4)

6. Aufgabe: Untersuche, ob die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ zyklisch ist. (3)

7. Aufgabe: $(G, \star)$ sei eine Gruppe, U und V seien Untergruppen von $(G, \star)$. Beweise, daß $U \cup V$ genau dann eine Untergruppe von $(G, \star)$ ist, wenn $U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$ gilt. (3)

8. Aufgabe: Es bezeichne $d_k : E \longrightarrow E$ für $k \in \mathbb{Z}$ die Drehung der Ebene E um den Winkel $k \cdot \frac{\pi}{3}$ (im mathematisch positiven Sinn) mit 0 als Mittelpunkt. Ferner sei $C_6 := \{d_k | k \in \mathbb{Z}\}$.

a) Beweise, daß C_6 genau 6 Elemente enthält.

b) Stelle die Verknüpfungstafel für $(C_6, \circ)$ auf.

c) Beweise, daß $(C_6, \circ)$ eine zyklische Gruppe ist, und bestimme alle erzeugenden Elemente von $(C_6, \circ)$.

d) Bestimme **alle** Untergruppen von $(C_6, \circ)$ und untersuche, welche davon zyklisch sind.

Hinweis: Der Satz von Lagrange darf hier nicht benutzt werden! (6)

e*) (Freiwillige Sonderaufgabe) Sind die Drehungen d_k $\mathbb{R}$–lineare Abbildungen? Wenn ja, bestimme ihre Darstellungsmatrizen. Läßt sich irgendetwas Signifikantes über die Menge dieser Darstellungsmatrizen aussagen? (3*)