

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Abgabe: Do. 3.11.2005, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: <http://math-www.uni-paderborn.de/~chris>

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel-Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein-Klausur erworben werden.

Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

5. Aufgabe: Seien $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}).$$

Berechne in der Produktgruppe $(S_4 \times \text{GL}_3(\mathbb{R}), \otimes)$:

- $(\rho, A) \otimes (\sigma, B)$
- das Inverse von (σ, B)
- die Potenz $(\rho, A)^{(-3)}$
- Welches ist das neutrale Element? (4)

6. Aufgabe: Untersuche, ob die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ zyklisch ist. (3)

7. Aufgabe: (G, \star) sei eine Gruppe, U und V seien Untergruppen von (G, \star) . Beweise, daß $U \cup V$ genau dann eine Untergruppe von (G, \star) ist, wenn $U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$ gilt. (3)

8. Aufgabe: Es bezeichne $d_k : E \rightarrow E$ für $k \in \mathbb{Z}$ die Drehung der Ebene E um den Winkel $k \cdot \frac{\pi}{3}$ (im mathematisch positiven Sinn) mit 0 als Mittelpunkt. Ferner sei $C_6 := \{d_k | k \in \mathbb{Z}\}$.

- Beweise, daß C_6 genau 6 Elemente enthält.
- Stelle die Verknüpfungstafel für (C_6, \circ) auf.
- Beweise, daß (C_6, \circ) eine zyklische Gruppe ist, und bestimme alle erzeugenden Elemente von (C_6, \circ) .
- Bestimme **alle** Untergruppen von (C_6, \circ) und untersuche, welche davon zyklisch sind.

Hinweis: Der Satz von Lagrange darf hier nicht benutzt werden! (6)

e*) (Freiwillige Sonderaufgabe) Sind die Drehungen d_k \mathbb{R} -lineare Abbildungen? Wenn ja, bestimme ihre Darstellungsmatrizen. Läßt sich irgendetwas Signifikantes über die Menge dieser Darstellungsmatrizen aussagen? (3*)