14. Übungsblatt

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Abgabe: Do. 9.2.2006, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.
Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

59. Aufgabe: R und S seien Ringe. Beweise:

a) Ist $\alpha : R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus, so gilt

i) $\alpha(R^\star) \subseteq S^\star$

ii) α Ringisomorphismus $\Longrightarrow$ $\alpha(R^\star) = S^\star$

b) $(R \times S)^\star = R^\star \times S^\star$ (4)

60. Aufgabe: Es sei $D_n(\mathbb{R})$ die Menge der oberen $(n \times n)$–Dreiecksmatizen über $\mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$.

a) Beweise, daß $D_n(\mathbb{R})$ ein Ring ist.

b) Die Abbildung $\alpha : D_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei definiert durch $(a_{ik}) \longmapsto (a_{ii})$. Beweise, daß α ein surjektiver Ringhomomorphismus ist, und bestimme Kern(α).

c) Beweise, daß der Faktorring $D_n(\mathbb{R})/\mathrm{Kern}(\alpha)$ ringisomorph zu dem Ring $\mathbb{R}^n$ ist. (4)

61. Aufgabe: Sei $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{Z}_n$ wird hier als Ring betrachtet. Beweise:

a) Für $a \in \mathbb{Z}$ gilt $[a]_n \in \mathbb{Z}_n^\star \iff \mathrm{ggT}(a,n) = 1$.

b) $|\mathbb{Z}_n^\star| = \varphi(n)$ (Hinweis: s. (5.8)).

c) Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a,n) = 1$ gilt $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. (4)

62. Aufgabe: Seien m und n teilerfremde Zahlen aus $\mathbb{N}$. Beweise:

a) Die Abbildung $\alpha : \mathbb{Z}_{mn} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, $[a]_{mn} \longmapsto ([a]_m, [a]_n)$ aus dem 2. Beweis von Lemma (9.4) ist auch ein Ringisomorphismsus.

b) $|\mathbb{Z}_{mn}^\star| = |\mathbb{Z}_m^\star| \cdot |\mathbb{Z}_n^\star|$. Was läßt sich hieraus für die Euler'sche Funktion φ folgern? (4)

63*. Aufgabe: a) Beweise: $|\mathbb{Z}_{p^k}^\star| = p^k - p^{k-1}$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und $k \in \mathbb{N}$ (Hinweis: Zähle die Zahlen aus $\{ r \mid r \in \mathbb{N}, 1 \leq r \leq p^k \}$, die nicht teilerfremd zu p^k sind).

b) Leite aus a) und Aufgabe 62 b) eine Formel für die Berechnung von $\varphi(n)$ $(n \geq 2)$ her, die auf der kanonischen PFZ von n basiert. (3*)