13. Übungsblatt

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Abgabe: Do. 2.2.2006, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.
Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

54. Aufgabe: Beweise, daß die Gruppe $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_3), \cdot)$ der (2×2)–Matrizen mit Determinante 1 über dem drei–elementigen Körper $\mathbb{Z}_3$ die Ordnung 24 hat. (3)

55. Aufgabe: Eine Gruppe $G \neq \{1\}$ heißt **einfach**, wenn $\{1\}$ und G die einzigen Normalteiler sind. Beweise:

a) Eine **abelsche** Gruppe ist genau dann einfach, wenn G eine Gruppe von Primzahlordnung ist.

b) Eine Gruppe der Ordnung 12 kann nicht einfach sein. (Hinweis: Zähle Elemente bestimmter Ordnungen)

c) Eine Gruppe der Ordnung $2p$ $(p \in \mathbb{P})$ kann nicht einfach sein.

d) Ist $f : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus und ist G einfach, so ist f entweder injektiv oder trivial.

e) Ist $f : G \longrightarrow H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, so gilt: N Normalteiler in $G \implies f(N)$ Normalteiler in H.

f) Eine einfache Gruppe G kann nicht zu einem kartesischen Produkt zweier Gruppen H und K isomorph sein, die beide $\neq \{1\}$ sind. (6)

56. Aufgabe: Sei $\varepsilon := e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$ $(n \geq 3)$, und es seien $A := \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Sei ferner $G := \langle A, B \rangle$ die von $\{A, B\}$ erzeugte Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Beweise: $G \cong \Delta_n$. (2)

57. Aufgabe: Bestimme von der Gruppe Δ_{31}

a) die Ordnung eines jeden Elementes und die Anzahl der Elemente, die die gleiche Ordnung haben

b) alle Untergruppen

c) alle Sylowuntergruppen

d) alle Normalteiler

e) das Zentrum

f) Zeichne den Untergruppenverband von Δ_{31} in übersichtlicher Form.

g) Untersuche, ob die in a) bis e) gefundenen Ergebnisse auch entsprechend in anderen Gruppen der Form Δ_n gelten können. (5)

***58. Aufgabe:** Sei p eine Primzahl. Eine endliche p–primäre zyklische Gruppe $G \neq \{1\}$ ist "unzerlegbar" in dem Sinne, daß es keine nichttrivialen Gruppen H und K gibt mit der Eigenschaft $G \cong H \times K$.

(3*)