12. Übungsblatt

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Abgabe: Do. 26.1.2006, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.

Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

49. Aufgabe: G_i, H_i seien Gruppen $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Für jedes i sei $f_i : G_i \longrightarrow H_i$ ein Gruppenhomomorphismus. Die Abbildung $f : G_1 \times \ldots \times G_r \longrightarrow H_1 \times \ldots \times H_r$ sei definiert durch

$$f((a_1, \ldots, a_r)) := (f_1(a_1), \ldots, f_r(a_r)) \ \ \forall (a_1, \ldots, a_r) \in G_1 \times \ldots \times G_r .$$

Beweise:

a) f ist ein Gruppenhomomorphismus

b) f injektiv $\iff$ f_i ist injektiv für jedes $i = 1, \ldots, r$

c) f surjektiv $\iff$ f_i ist surjektiv für jedes $i = 1, \ldots, r$

d) f bijektiv $\iff$ f_i ist bijektiv für jedes $i = 1, \ldots, r$. (4)

50. Aufgabe: Sei $p \in \mathbb{P}$. Eine (nicht notwendig endliche) abelsche Gruppe heißt p–primär, wenn die Ordnung eines jeden Elemnentes von G eine Potenz von p ist. Beweise für eine p–primäre Gruppe:

a) Jede Untergruppe $U \leq G$ ist p–primär.

b) Ist $f : G \longrightarrow H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, so ist auch H p–primär.

c) Das kartesische Produkt zweier Gruppen H und K ist genau dann p–primär, wenn H und K p–primär sind.
(3)

51. Aufgabe: Es sei G eine Gruppe und p eine Primzahl.

a) Untersuche, ob die folgende Aussage richtig ist: N Normalteiler in G und G/N zyklisch $\Longrightarrow$ G abelsch.

Beweise:

b) N Normalteiler in G mit $N \subseteq Z(G)$ und G/N zyklisch $\Longrightarrow G$ abelsch.

c) Gilt $|G| = p^2$, so ist G abelsch, und es gilt $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ oder $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

(**Hinweis:** Ohne Beweis darf benutzt werden, daß das Zentrum von G nicht $\{1_G\}$ ist)

d) Untersuche, ob auch jede Gruppe der Ordnung p^3 abelsch ist. (5)

52. Aufgabe: Bestimme in den folgenden Fällen die Anzahl der Isomorphieklassen abelscher Gruppen der Ordnung n und gib für jede Isomorphieklasse einen Vertreter an:

a) $n = 243$ **b)** $n = 5000$. (4)

***53. Aufgabe:** Sei p eine Primzahl und $G := \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_p)$ die allgemeine lineare Gruppe der invertierbaren (3×3)–Matrizen über dem Körper $\mathbb{Z}_p$. Beweise, daß

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

eine p–Sylowuntergruppe von G ist. (3*)