11. Übungsblatt

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Abgabe: Do. 19.1.2006, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.

Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

44. Aufgabe: a) G sei eine Gruppe und N ein Normalteiler in G. Beweise, daß die Abbildung f von der Menge $\mathcal{U} := \{U \mid N \subseteq U, U \leq G\}$ in die Menge $\mathcal{V} := \{V \mid V \leq G/N\}$ definiert durch $f(U) := U/N$ bijektiv ist.

b) Bestimme mit Hilfe von a) alle Untergruppen der Faktorgruppe $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}12 = \mathbb{Z}_{12}$.

c) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und gelte $m|n$. Bestimme den Index $(\mathbb{Z}m : \mathbb{Z}n)$. (4)

45. Aufgabe: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Kongruenzrelation modulo n auf $\mathbb{Z}$ definiert durch

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \Longleftrightarrow \quad n \mid (a-b) \quad (\forall\, a, b \in \mathbb{Z})$$

($a \equiv b \pmod{n}$ wird gelesen als: "a ist kongruent zu b modulo n") . Beweise, daß für alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gilt

a) $a \equiv a \pmod{n}$ **b)** $a \equiv b \pmod{n} \implies b \equiv a \pmod{n}$

c) $a \equiv b \pmod{n}$ und $b \equiv c \pmod{n} \implies a \equiv c \pmod{n}$

d) Aus $a \equiv b \pmod{n}$ und $c \equiv d \pmod{n}$ folgt $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ und $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}$

e) $[a]_n = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \equiv a \pmod{n}\}$

f) Sind m und n teilerfremde natürliche Zahlen, so sind die Kongruenzen

$$(\star) \quad x \equiv a \pmod{m}, \; x \equiv b \pmod{n}$$

simultan in $\mathbb{Z}$ lösbar, und je zwei Lösungen von $(\star)$ sind kongruent modulo $m \cdot n$.
Hinweis: (9.4) könnte hilfreich sein! (5)

46. Aufgabe: G sei eine Gruppe. Für ein Element $a \in G$ sei die Abbildung $\tau_a : G \longrightarrow G$ definiert durch $\tau_a(x) := axa^{-1}$ $(x \in G)$. Beweise:

a) τ_a ist ein Gruppenisomorphismus.

b) Eine Untergruppe $U \leq G$ ist genau dann ein Normalteiler in G, wenn $\tau_a(U) = U$ für alle $a \in G$ gilt. (3)

47. Aufgabe: Das Zentrum $Z(G)$ einer Gruppe G ist definiert durch

$$Z(G) := \{a \mid a \in G, \forall x \in G : ax = xa\}.$$

a) Beweise, daß $Z(G)$ ein Normalteiler in G ist.

b) Bestimme $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$. (4)

***48. Aufgabe:** G sei eine Gruppe, U eine Untergruppe von G und N ein Normalteiler von G. Beweise:

a) $UN \leq G$ **b)** N ist Normalteiler in UN **c)** $U \cap N$ ist Normalteiler in U

d) $U/U \cap N \cong UN/N$ (Hinweis: Benutze den Homomorphiesatz).

e) Läßt sich mit Hilfe von d) ein neuer Beweis für (3.14) (nur für natürliche Zahlen) finden? (3*)