10. Übungsblatt

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Abgabe: Do. 12.1.2006, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.
Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

39. Aufgabe: $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \triangle)$ sei ein Gruppenhomomorphismus, und es gelte $|G| < \infty$. Beweise:

a) $\mathrm{ord}(f(a)) < \infty$ und $\mathrm{ord}(f(a)) \,|\, \mathrm{ord}(a) \quad \forall\, a \in G$

b) Ist auch H endlich und haben die beiden Gruppen G und H teilerfremde Ordnungen, so folgt $f(a) = e_H \quad \forall\, a \in G$. (3)

40. Aufgabe: $(G, \star)$ sei eine Gruppe, U und V seien Untergruppen von $(G, \star)$. Beweise:

a) Ist U ein Normalteiler von $(G, \star)$, so ist $U \star V$ eine Untergruppe von $(G, \star)$.

b) Sind U und V Normalteiler und gilt $U \cap V = \{e\}$, so folgt:

1) Jedes Element aus $a \in U \star V$ läßt sich **eindeutig** in der Form $a = u \star v$ mit $u \in U$ und $v \in V$ darstellen.

2) Für alle $u \in U$ und $v \in V$ gilt $u \star v = v \star u$.

3) Es gibt einen Gruppenisomorphismus von der Produktgruppe $U \times V$ auf die Gruppe $U \star V$. (5)

41. Aufgabe: $(G, \star)$ und $(H, \triangle)$ seien Gruppen, und $P := G \times H$ sei die Produktgruppe. Beweise:

a) Die Abbildung $p_G : G \times H \longrightarrow G\,,\ (a, b) \longmapsto a$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Was ist der Kern dieser Abbildung?

b) $G \times \{e_H\}$ ist ein Normalteiler in P.

c) Die Faktorgruppe $(G \times H)/(G \times \{e_H\})$ ist isomorph zu H. Gib einen Isomorphismus explizit an. (4)

42. Aufgabe: $f : (G, \star) \longrightarrow (H, \triangle)$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Beweise:

a) **1)** Im Falle $|G| \in \mathbb{P}$ ist f entweder injektiv oder trivial.

2) Im Falle $|H| \in \mathbb{P}$ ist f entweder surjektiv oder trivial.

b) Ist G endlich, so folgt $|G| = |\mathrm{Kern}(f)| \cdot |\mathrm{Bild}(f)|$. (3)

***43. Aufgabe:** p sei eine Primzahl. Bekannt ist, daß $\mathbb{Z}_p$ ein Körper mit p Elementen ist (Die additive Gruppe von $\mathbb{Z}_p$ ist die Faktorgruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ nach dem Normalteiler $\mathbb{Z}p$. Man mache sich klar, wie zwei Restklassen modulo p addiert bzw. multipliziert werden!) $(G, +)$ sei eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe mit neutralem Element 0_G, in der jedes Element $\neq 0_G$ die Ordnung p besitzt. Beweise:

a) Auf G wird durch die Festsetzung $[a]_p \cdot x := ax \quad ([a]_p \in \mathbb{Z}_p\,, x \in G)$ eine Skalarmultiplikation definiert, die G zu einem Vektorraum über $\mathbb{Z}_p$ macht. Begründe insbesondere die Wohldefiniertheit der Skalarmultiplikation!

b) Ist G endlich, so ist $|G|$ eine Potenz von p.

c) Eine abelsche Gruppe H der Ordnung $p \cdot q$, wobei p und q verschiedene Primzahlen sind, ist zyklisch.

d) Gib einen neuen Beweis für Aufgabe 28 a). (3*)

Frohe Weihnachten und ein erfolgreiches Neues Jahr!