1. Übungsblatt

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Abgabe: Do. 27.10.2005, bis 13.00 Uhr

Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.
Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

1. Aufgabe: a) Sei $G := \{1, -1, i, -i\} \subseteq \mathbb{C}$. Stelle die Verknüpfungstafel für $(G, \cdot)$ auf und beweise, daß $(G, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.

b) Setze $M :=: \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ferner sei H die Menge der Abbildungen $f_k : M \longrightarrow M$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, die durch folgende Zurdnungsvorschriften definiert sind: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = 1/x$, $f_4(x) = -1/x$ $(\forall\, x \in M)$. Berechne $f_2 \circ f_3$ und $f_4 \circ f_4$ ausführlich. Stelle die Verknüpfungstafel für $(H, \circ)$ auf und beweise, daß $(H, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist. (5)

2. Aufgabe: Eine Matrix $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ heißt **orthogonal**, wenn ${}^tM \cdot M = E_n = M \cdot {}^tM$ gilt (${}^tM$ bezeichnet die transponierte Matrix von M und E_n die n–reihige Einheitsmatrix). Es sei $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ die Menge aller orthogonalen Matrizen aus $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Beweise, daß $\mathcal{O}(n)$ eine Gruppe bzgl. der Matrizenmultiplikation ist. (4)

3. Aufgabe: Es sei G eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $\star$. Beweise, daß $(G, \star)$ eine Gruppe ist, wenn die Gleichungen

$$x \star a = b \qquad \text{und} \qquad a \star y = b$$

für alle $a, b \in G$ Lösungen in G besitzen. (3)

4. Aufgabe: Sei G eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $\star$. Es gelte

i) Es gibt ein $e \in G$ mit $e \star a = a$ für alle $a \in G$

ii) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $b \star a = e$.

Beweise, daß $(G, \star)$ eine Gruppe ist.

Beachte: die Verknüpfung $\star$ muß nicht kommutativ sein! (4)