4. Übungsblatt

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Musterlösung für die Aufgabe 16

Aufgabe 16) a) Die Matrizen $D(\alpha)$ und $S(\alpha)$ sind orthogonal, da die Spalten jeweils ein Orthonormalsystem bilden. Folglich $\underline{\mathcal{D} \cup \mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}(2)}$.

Aus $\det(D(\alpha)) = 1$ und $\det(S(\alpha)) = -1$ folgt $\underline{\mathcal{D} \cap \mathcal{S} = \emptyset}$.

b) Unter Zuhilfenahme der Additionstheoreme für cos und sin läßt sich leicht zeigen:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & D(\alpha) \cdot D(\beta) & = & D(\alpha + \beta) \\ (2) & D(\alpha) \cdot S(\beta) & = & S(\alpha + \beta) \\ (3) & S(\alpha) \cdot S(\beta) & = & D(\alpha - \beta) \end{array}$$

Damit ergibt sich sofort $\underline{\mathcal{D} \cdot \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}}$, $\underline{\mathcal{D} \cdot \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}}$, $\underline{\mathcal{S} \cdot \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}}$

c) Nachweis der Untergruppeneigenschaften für $\mathcal{D}$:

UG_1) Wegen $\mathcal{D} \cdot \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$ (nach b)) ist $\mathcal{D}$ abgschlossen bzgl. $\cdot$

UG_2) $D(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 \in \mathcal{D}$

UG_3) $D(\alpha) \cdot D(-\alpha) \stackrel{(1)}{=} D(0) = E_2 = D(-\alpha) \cdot D(\alpha)$, d.h. $D(\alpha)^{-1} = D(-\alpha) \in \mathcal{D}$.

Damit ist $\underline{\mathcal{D}\text{ Untergruppe von }(\mathcal{O}(2), \cdot)}$.

Aus (1) folgt $D(\alpha) \cdot D(\beta) = D(\alpha + \beta) = D(\beta + \alpha) = D(\beta) \cdot D(\alpha)$,

d.h. $\underline{(\mathcal{D}, \cdot)\text{ ist eine abelsche Gruppe}}$.

Wegen $E_2 \notin \mathcal{S}$ ist $\underline{\mathcal{S}\text{ keine Untergruppe von }(\mathcal{O}(2), \cdot)}$.

d*) Anschaulich ist eine lineare Abbildung $s : E \longrightarrow E$ mit $S(\alpha)$ als Darstellungsmatrix eine Spiegelung der Ebene an einer Geraden durch den Nullpunkt, die mit der positiven x–Achse den Winkel $\dfrac{\alpha}{2}$ bildet.

Die Inklusion $\underline{\mathcal{O}(2) \subseteq \mathcal{D} \cup \mathcal{S}}$ gilt im wesentlichen deshalb, weil sich Punkte der Ebene, die auf dem Einheitskreis liegen, in der Form

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

mit geeignetem $\alpha \in [0, 2\pi[$ darstellen lassen.